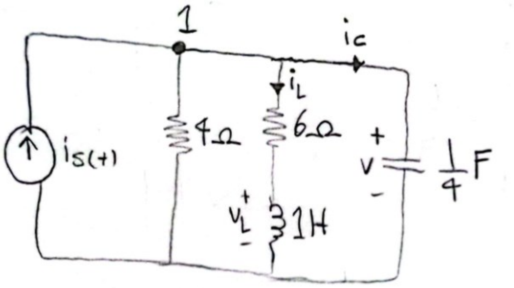
پاسخ نامه تکلیف سری ۲
مدار الکتریکی ترم ۴۰۲۲



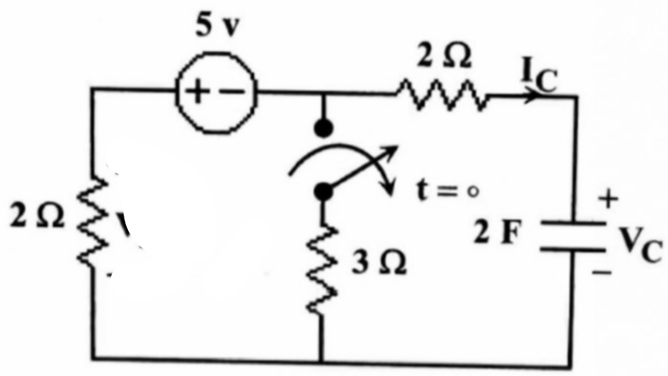
Kvl (راست‌ترین حلقه) : $-V+6i_L+V_L=0 \longrightarrow V=6i_L+\frac{di_L}{dt} \quad \mathrm{I}$

Kcl (1) : $-i_s+\frac{V}{4}+i_c+i_L=0 \longrightarrow \frac{V}{4}+i_L+\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}=i_s \rightarrow i_L=i_s-\frac{V}{4}-\frac{1}{4}\frac{dv}{dt} \quad \mathrm{II}$

$\mathrm{I},\mathrm{II} \rightarrow V=6\left(i_s-\frac{V}{4}-\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}\right)+\frac{d}{dt}\left(i_s-\frac{V}{4}-\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}\right)$

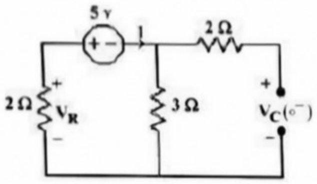
$V=6i_s-\frac{6}{4}V-\frac{6}{4}\frac{dv}{dt}+\frac{di_s}{dt}-\frac{1}{4}\frac{dv}{dt}-\frac{1}{4}\frac{d^2v}{dt^2}$

$\frac{d^2v}{dt^2}+7\frac{dv}{dt}+10V=4\frac{di_s}{dt}+24i_s$

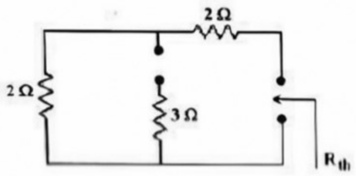


ـت، می‌توان ابتدا معادله تغییرات V_C را محاسبه کرده و بـا توجـه

به رابطه $I_C = C\frac{dV_C}{dt}$، معادله I_C را بدست آوریم … در لحظه $t = ۰^-$ مدار شکل زیر را داریم:



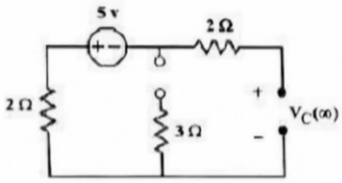
$$V_C(۰^-) = V_C(۰^+) = \boxed{\overset{I}{\uparrow}\left(-\frac{۵}{۲+۳}\right)} \times ۳ = -۳\,v$$



برای محاسبه R_{th} پس از تغییر وضعیت کلید و اتصال کوتاه کردن منبع ولتاژ، مقاومت معادل از دو سر خازن را محاسبه می‌کنیم. (دقت شود هدف $t > ۰$ است ← بعد از کلیدزنی)

$R_{th} = ۲ + ۲ = ۴\Omega$

$\tau = R_{th} \times C = ۴ \times ۲ = ۸\,sec$



برای محاسبه $V_C(\infty)$، در $t = \infty$ مدار را ترسیم و به جای خازن، مدار باز قرار می‌دهیم:

$V_C(\infty) = -۵v$

حال با توجه به شکل سؤال، برای $t > ۰$ داریم:

$$V_C(t) = V_C(\infty) + [V_C(۰^+) - V_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow V_C(t) = -۵ + [-۳ - (-۵)]e^{-\frac{t}{۸}} = ۲e^{-\frac{t}{۸}} - ۵$$

$$I = c\frac{dv(t)}{dt} \qquad I_c(t) = 2 \cdot \frac{d\left(2e^{\frac{-t}{8}} - 5\right)}{dt} = \frac{-e^{\frac{-t}{8}}}{2}$$

روش تست:

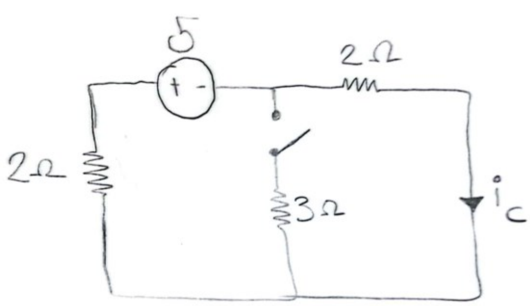
با توجه به این که منبع ثابت و مقاومت در مدار وجود دارد پس هیچ گاه جریان خازن بینهایت نمیشود و مطابق روش تست :

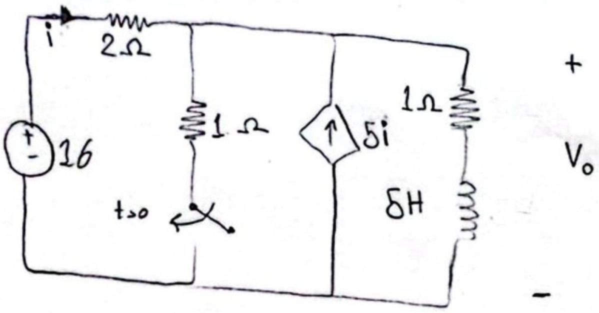
$V_C(0^-) = V_C(0^+)$

روش تست

$i_C = \frac{5}{2+2} = \frac{5}{4} \neq \infty$

$i_C \neq \infty \rightarrow V_C(0^-) = V_C(0^+)$





ابتدا در t<0 جریان سلف را محاسبه کنیم تا به کمک آن در t>0 ولتاژ V_0 را به دست بیاوریم

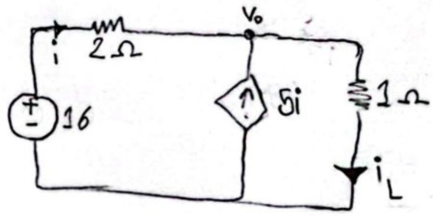
در t<0 سلف اتصال کوتاه است

KCL $\left(\frac{V_0-16}{2}\right)-5i+V_0=0$

$i=\frac{16-V_0}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}V_0-8-5\left(\frac{16-V_0}{2}\right)$

$4V_0=48 \to V_0=12 \to i=2$

$i_L(0^-)=i_L(0^+)=12$



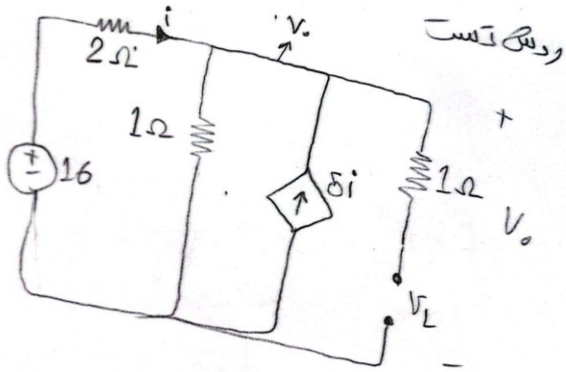
$\frac{V_0}{1}-i-5i=0$

$V_0=6i$

$\frac{16-V_0}{2}=i \to V_0=16-2i$ $\quad V_0=12$, $i=2$

$V_0=V_L=12\neq\infty$

روش تست



با توجه به روش تست حال به محاسبه‌ی V_0 در t>0 می پردازیم

در این حالت بجای سلف یک منبع جریان با مقدار $i_L(0^+)$ را گذاریم

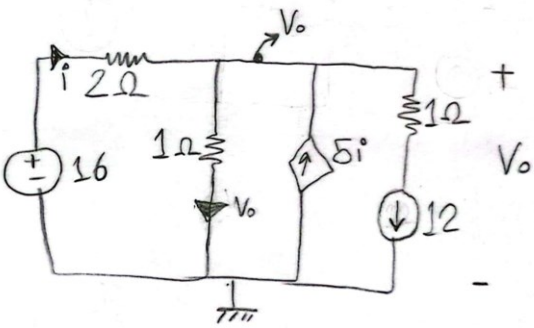
$i=\frac{16-V_0}{2}$

KCL(V_0)

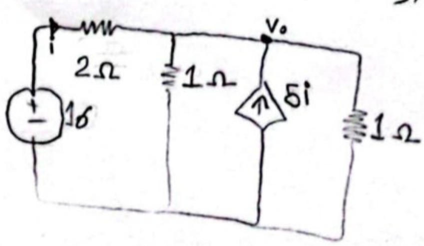
$+V_0-i-5i+12=0$

$V_0=6i-12 \to V_0=48-3V_0-12$

$4V_0=36 \to V_0=9 \to V_0(0^+)=\boxed{9}$



در $t=\infty$ سلف اتصال کوتاه



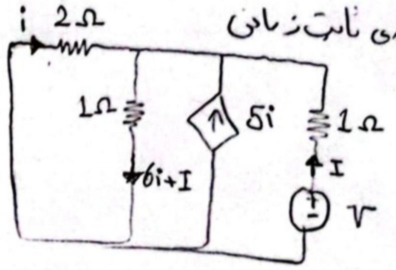
KCL

$$\frac{V_0-16}{2}+\frac{V_0}{1}+\frac{V_0}{1}-5i=0$$

$$i=\frac{16-V_0}{2} \to 2.5V_0-8-5\left(\frac{16-V_0}{2}\right)$$

$$5V_0=48 \to V_0=\frac{48}{5}$$

محاسبه ثابت زمانی



KVL (حلقه سمت چپ) $: 2i+6i+I=0 \to I=-8i$

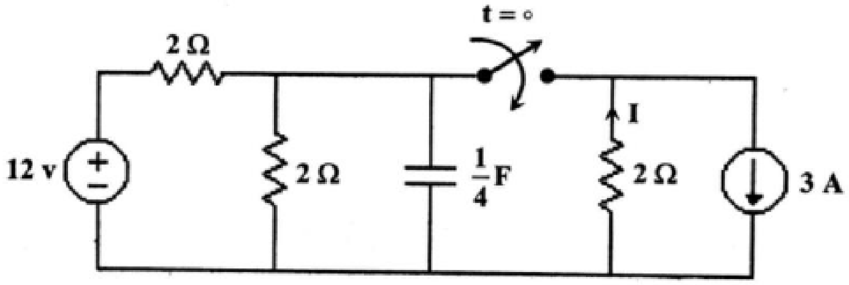
KVL (در بزرگترین حلقه) $: 2i-I+V=0$

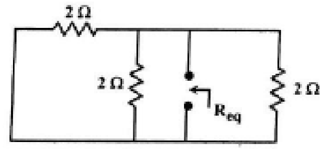
$$\frac{-I}{4}-I+V=0 \to V=\frac{5}{4}I \to R=\boxed{\frac{5}{4}}$$

$$\tau=\frac{L}{R}\to\frac{5}{\frac{5}{4}}=4$$

$$V_0(t)=[V_0(0^+)-V_0(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}+V_0(\infty)\to\left(9-\frac{48}{5}\right)e^{-\frac{t}{4}}+\frac{48}{5}\to\frac{-3}{5}e^{-\frac{t}{4}}+\frac{48}{5}$$

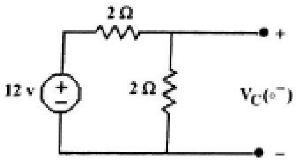
در مدار زیر معادله جریان I را برای $t > 0$ محاسبه کنید.





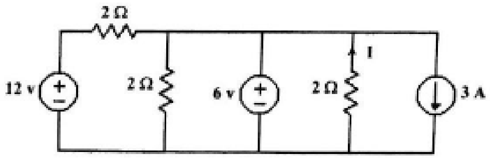
ابتدا مقاومت معادل از دو سر خازن را بعد از کلیدزنی محاسبه کرده و سپس مقدار ثابت زمانی را محاسبه می‌کنیم.

$$R_{eq} = ۲||۲||۲ = \frac{۲}{۳}\Omega \quad , \quad \tau = \frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۶}\ (sec)$$



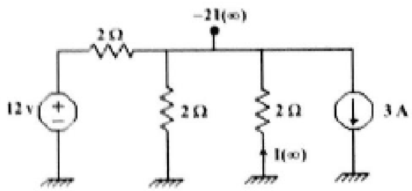
حال مدار را در $t = ۰^-$ تحلیل می‌کنیم. در این حالت خازن با مدار باز مدل می‌شود.
از طرفی در لحظه $t = ۰^-$ مدار در حالت دائمی است، لذا طبق قانون تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_C(۰^-) = V_C(۰^+) = \frac{۲}{۲+۲}\times ۱۲ = ۶v$$



برای تحلیل در $t = ۰^+$، به جای خازن، منبع ولتاژی به اندازه $V_C(۰^-)$ قرار می‌دهیم.

$$I(۰^+) = -\frac{۶}{۲} = -۳A$$



برای محاسبه $I(\infty)$ مدار را در $t = \infty$ ترسیم کرده و در گره بالای مدار KCL می‌زنیم.

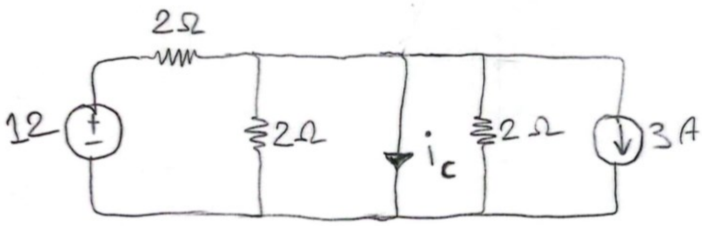
$$\frac{-۲I(\infty)-۱۲}{۲} + \frac{-۲I(\infty)}{۲} + ۳ = I(\infty) \Rightarrow I(\infty) = -۱A$$

حال معادله $I(t)$ را مطابق با فرمول زیر بدست می‌آوریم:

$$I(t) = I(\infty) + [I(۰^+) - I(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = -۱ + [-۳+۱]e^{-۶t} \Rightarrow I(t) = -۱ - ۲e^{-۶t}$$

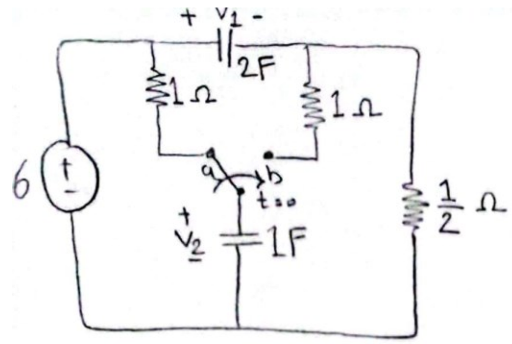
روش تست :با توجه به این که منبع ثابت و مقاومت در مدار وجود دارد پس هیچ گاه جریان بینهایت نمیشود و مطابق روش تست :
$V_C(0^-) = V_C(0^+)$

روش تست



$i_C = \frac{12}{2} + 3 \rightarrow i_C = 9$

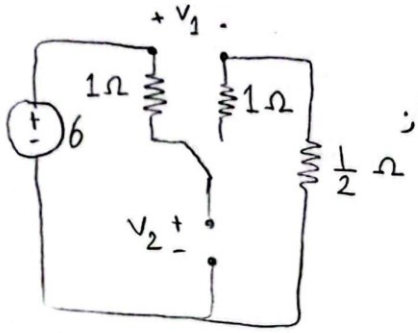
$i_C = 9 \neq \infty \longrightarrow V_C(0^-) = V_C(0^+)$



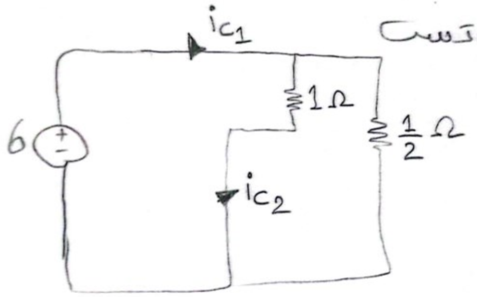
ابتدا مقدار $V_1(0^-)$ و $V_2(0^-)$ را به دست می آوریم

شکل مدار را در $t<0$ رسم می کنیم خازن ← مدار باز

$V_1(0^-)=V_2(0^-)=6$



روش تست



$i_{C_2}=6 \neq \infty$

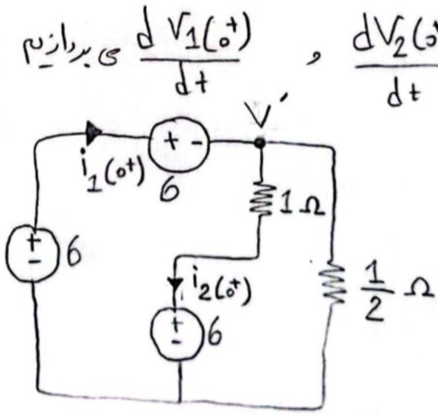
$i_{C_1}=18 \neq \infty$

$V_{C_1}(0^-)=V_{C_1}(0^+)$

$V_{C_2}(0^-)=V_{C_2}(0^+)$

سپس به محاسبه‌ی $\frac{dV_2(0^+)}{dt}$ و $\frac{dV_1(0^+)}{dt}$ می پردازیم

جهت جریان ساعتگرد فرض شده ← (حلقه چپ) KVL



$-6+6+1\cdot i_2(0^+)+6=0 \rightarrow i_2(0^+)=-6$

$V'=0$

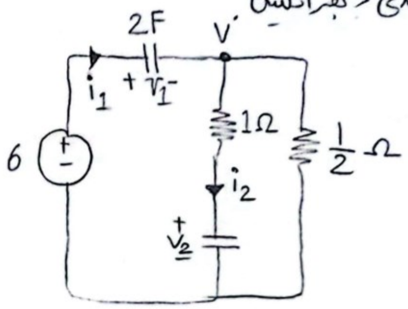
$KCL(V')$

$-i_1(0^+)+i_2(0^+)=0 \rightarrow i_1(0^+)=i_2(0^+)$

$\frac{dV_2(0^+)}{dt}=\frac{i_2(0^+)}{C_2}=-6$

$\frac{dV_1(0^+)}{dt}=\frac{i_1(0^+)}{C_1}=-3$

معادله دیفرانسیل



$V' = i_2 + V_2 = \frac{dV_2}{dt} + V_2$

KVL (حلقه چپ): $-6 + V_1 + i_2 + V_2 = 0$

$V_1 = 6 - i_2 - V_2 = 6 - \frac{dV_2}{dt} - V_2$

Kcl(1): $i_2 + \frac{V'}{\frac{1}{2}} - i_1 = 0$

$\frac{dV_2}{dt} + 2\left(\frac{dV_2}{dt} + V_2\right) = 2\frac{dV_1}{dt}$

$\frac{dV_2}{dt} + 2\left(\frac{dV}{dt} + V_2\right) = 2\frac{d(6 - \frac{dV_2}{t} - V_2)}{dt}$

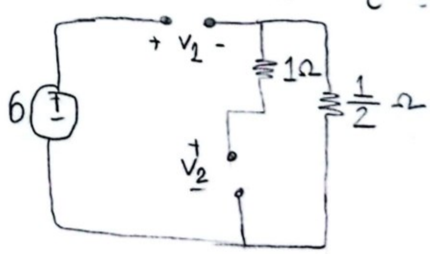
$\frac{2d^2V_2}{dt^2} + 5\frac{dV_2}{dt} + 2V_2 = 0 \longrightarrow 2S^2 + 5S + 2 = 0 \quad S = -2, -\frac{1}{2}$

پاسخ خصوصی

$V_2(t) = Ae^{-2t} + Be^{-\frac{1}{2}t} + K \rightarrow K = V_2(\infty) = 0$

پاسخ خصوصی:

$t = \infty$



$V_1(\infty) = 6$

$V_2(\infty) = 0$

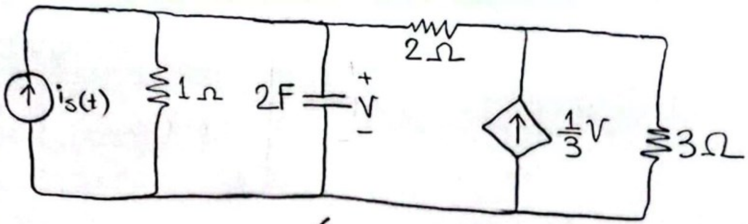
$V_2(0) = 6 \rightarrow A + B = 6$

$V_2'(0) = -6 \rightarrow -2A - \frac{1}{2}B = -6$

$A = 2 \quad B = 4$

$V_2(t) = 2e^{-2t} + 4e^{-\frac{1}{2}t}$

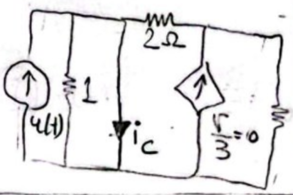
$V_1(t) = 6 - \frac{dV_2}{dt} - V_2 = 2e^{-2t} - 2e^{-\frac{1}{2}t} + 6$



روش تست : خازن ← اتصال کوتاه

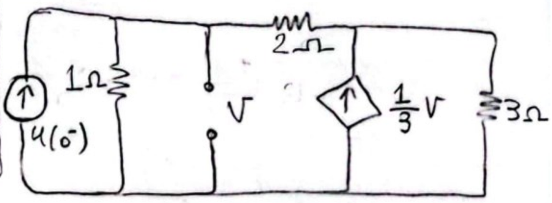
$i_c = u(t) \neq \infty$

$V(0^-) = V(0^+) = 0$



روش کلی

t<0 : خازن مدار باز $\quad V(0^-) = 0$



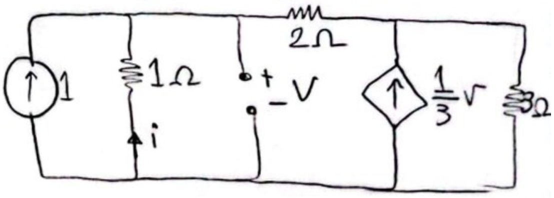
$KVL: \; i + 2(i+1) + 3(i+1+\frac{1}{3}V) = 0$

$6i + 5 + V = 0 \to 5i = -5 \Rightarrow \boxed{i = -1} \qquad i = -V$

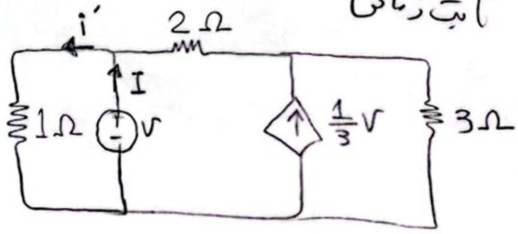
$\boxed{V = 1}$

$V(\infty) = 1$

t=∞ : خازن ← مدار باز



ثابت زمانی



$V = i'$

$KVL: \; 2(I - i') + 3(I - i' + \frac{1}{3}V) - V = 0$

$5I - 5i' = 0 \to 5I = 5i'$,

$5I = 5V \to R_{th} = 1$

$\tau = RC = 2$

پاسخ پله : $V(\infty) + [V(0^+) - V(\infty)]\,e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow 1 + (0-1)\,e^{-\frac{t}{2}} \to (1 - e^{-\frac{t}{2}})\,u(t)$

$\frac{d}{dt}(1 - e^{-\frac{t}{2}}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \to$ پاسخ ضربه

پاسخ ضربه از مشتق پاسخ پله به دست می آید .

با توجه به اینکه شرایط اولیه در t<0 (گذشته) صفر است و پله و ضربه در گذشته صفر هستند