مثال ۱ :

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 10 \quad : \quad t \ge 0$$
$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = -1 \ , \ y''(0) = 0$$

راه حل :

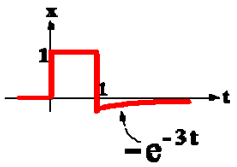
$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6y = 0 \rightarrow \quad s = -1 \ , \ -2 \ , \ -3$$
$$y_h = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + k_3 e^{-3t}$$
$$y_p = A \rightarrow \quad 0 + 0 + 0 + 6B = 10 \Rightarrow B = \frac{5}{3}$$
$$y = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + k_3 e^{-3t} + \frac{5}{3} \begin{cases} 1 = \frac{5}{3} + k_1 + k_2 + k_3 \\ -1 = -k_1 - 2k_2 - 3k_3 \\ 0 = k_1 + 4k_2 + 9k_3 \end{cases}$$
$$y' = -k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} - 3k_3 e^{-3t}$$
$$y'' = k_1 e^{-t} + 4k_2 e^{-2t} + 9k_3 e^{-3t}$$
$$k_1 = -4.5 \ , \ k_2 = 6 \ , \ k_3 = -\frac{13}{6}$$
$$y = -4.5 e^{-t} + 6e^{-2t} - \frac{13}{6} e^{-3t} + \frac{5}{3}$$

مثال ۲ :

$$y'' + 3y' + 2y = x' + 4x \quad : \quad t \ge 0$$

ناپیوسته نامحدود — ناپیوسته نامحدود — درجه اول — درجه اول — ناپیوسته محدود — ناپیوسته محدود — پیوسته

$$y(0^-) = 1$$
$$y'(0^-) = -1$$



$$\int_{0^-}^{0^+} y''dt + 3\int_{0^-}^{0^+} y'dt + 2\int_{0^-}^{0^+} ydt = \int_{0^-}^{0^+} x'dt + 4\int_{0^-}^{0^+} xdt$$
$$y(0^+) - y(0^-) = 0$$
$$\int_{0^-}^{0^+} y''dt + 3\int_{0^-}^{0^+} y'dt + 2\int_{0^-}^{0^+} ydt = \int_{0^-}^{0^+} x'dt + 4\int_{0^-}^{0^+} xdt$$
$$y'(0^+) - y'(0^-) = x(0^+) - x(0^-) = 1 \rightarrow \quad y'(0^+) = 0$$

ابتدا پاسخ را در فاصله $0 < t < 1$ بدست می آوریم.

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \rightarrow \quad s = -1 \ , \ -2$$
$$y_h = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}$$
$$x' + 4x = \delta(t) + 4u(t) = \begin{cases} 4 & : \ t > 0 \\ 0 & : \ t < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y_p = A$$

y_p شامل $\delta(t)$ نیست. زیرا y پیوسته است.

$$0 + 0 + 2A = 4 \rightarrow \quad A = 2$$
$$y = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + 2 \rightarrow \quad 1 = k_1 + k_2 + 2 \qquad \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$
$$y' = -k_1 e^{-t} - k_2 e^{-2t} \rightarrow \quad 0 = -k_1 - 2k_2$$

پس می توان نوشت :

$$y = -2e^{-t} + e^{-2t} + 2 \quad : \quad 0 \le t \le 1$$

بطوریکه می‌توان در بازه زمانی تساوی قرار داد. زیرا پاسخ پیوسته است.

$$\int_{1^-}^{1^+} y''dt + 3\int_{1^-}^{1^+} y'dt + 2\int_{1^-}^{1^+} ydt = \int_{1^-}^{1^+} x'dt + 4\int_{1^-}^{1^+} xdt$$
$$y'(1^+) - y'(1^-) = x(1^+) - x(1^-) = -e^{-3} - 1$$
$$y' = 2e^{-t} - 2e^{-2t} \quad : \quad 0 \le t < 1$$
$$y'(1^-) = 2e^{-1} - 2e^{-2} \rightarrow y'(1^+) = 2e^{-1} - 2e^{-2} - e^{-3} - 1$$
$$y_h = k_3 e^{-t} + k_4 e^{-2t} \qquad y_p = Be^{-3t}$$
$$9Be^{-3t} - 9Be^{-3t} + 2Be^{-3t} = 3e^{-3t} - 4e^{-3t} \rightarrow \quad B = -0.5$$
$$y = k_3 e^{-t} + k_4 e^{-2t} - 0.5e^{-3t}$$
$$y(1^-) = y(1^+) \Rightarrow \quad 2 + e^{-2} - 2e^{-1} = -0.5e^{-3} + k_3 e^{-1} + k_4 e^{-2}$$
$$y' = -k_3 e^{-t} - 2k_4 e^{-2t} + 1.5e^{-3t}$$
$$y'(1^+) = 2e^{-1} - 2e^{-2} - e^{-3} - 1 = 1.5e^{-3} - k_3 e^{-1} - 2k_4 e^{-2}$$

از دو معادله فوق ضرایب پاسخ بدست می‌آید.

مثال ۳ :

$$y' + 2y = x \qquad y(0^-) = 0$$

ناپیوسته محدود — ناپیوسته محدود — پیوسته

$$x = \cos(t)u(t)$$

فرض کنید : $x = e^{jt}u(t)$

$$y(0^+) = 0 \qquad y_{lh} = ke^{-2t}$$
$$y_{lp} = Ae^{jt} \rightarrow jAe^{jt} + 2Ae^{jt} = e^{jt} \Rightarrow A = \frac{1}{j+2}$$
$$y_l = ke^{-2t} + \frac{1}{j+2}e^{jt} \rightarrow 0 = k + \frac{1}{j+2} \Rightarrow k = -\frac{1}{j+2}$$

$$y_1 = -\frac{1}{j+2}e^{-2t} + \frac{1}{j+2}e^{jt} \rightarrow y_1 = -\frac{2-j}{5}e^{-2t} + \frac{2-j}{5}e^{jt}$$

$$y = \mathrm{Re}(y_1) \rightarrow \quad y = -\frac{2}{5}e^{-2t} + \mathrm{Re}\left(\frac{2-j}{5}e^{jt}\right)$$

$$y = -\frac{2}{5}e^{-2t} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}e^{j\varphi}e^{jt}\right) \quad \varphi = -\tan^{-1}(0.5)$$

$$y = -\frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos(t - 26.57^\circ)$$