

حل امتحان میان ترم ۲ مدارهای الکتریکی ۹۲/۹/۶

- الف -

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}R_1 & \frac{1}{6}R_2 \\ \frac{1}{6}R_1 & -\frac{1}{6}R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/5 \\ -1/6 \end{bmatrix} v_s \quad |sI - A| = \begin{vmatrix} s + \frac{1}{2}R_1 & \frac{-1}{6}R_2 \\ \frac{-1}{6}R_1 & s + \frac{1}{6}R_2 \end{vmatrix} = .$$

$$(s + \frac{1}{2}R_1)(s + \frac{1}{6}R_2) - \frac{1}{36}R_1R_2 = . \rightarrow s^2 + (\frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{6}R_2)s + \frac{1}{18}R_1R_2 = .$$

$$\Delta = (\frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{6}R_2)^2 - \frac{4}{18}R_1R_2 = (\frac{1}{2}R_1 - \frac{1}{36}R_2)^2 + \frac{35}{36}R_2^2 > .$$

حقیقی منفی متمایز است (Δ مثبت)
برای معادله مشخصه درجه ۲

$$s^2 + (\frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{6}R_2)s + \frac{1}{18}R_1R_2 = ., \quad s = -2, \quad R_2 = 6 \rightarrow 4 - 2(\frac{1}{2}R_1 + 1) + \frac{1}{3}R_1 = . \rightarrow R_1 = 3$$

- ب -

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 1 \\ 0/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/5 \\ -1/6 \end{bmatrix} v_s \quad X = (sI - A)^{-1}BU = \begin{bmatrix} s + 1/5 & -1 \\ -0/5 & s + 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0/5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{s^2 + 2/5s + 1} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0/5 & s+1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/5 \\ -1/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2/5s + 1} \begin{bmatrix} 0/5s + 1/3 \\ -1/6s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} v_s \rightarrow Y = CX + DU = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 2/5s + 1} \begin{bmatrix} 0/5s + 1/3 \\ -1/6s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{-1}{6}s \\ \frac{s^2 + 2/5s + 1}{s^2 + 2/5s + 1} \\ \frac{-4}{3}s - \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3}s \end{bmatrix} \rightarrow Y_1 = \frac{\frac{-1}{6}s}{s^2 + 2/5s + 1} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{B_1}{s+0/5} \rightarrow A_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\frac{-1}{6}s}{2s + 2/5} = \frac{-2}{9}$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow -0/5} \frac{\frac{-1}{6}s}{2s + 2/5} = \frac{1}{18} \Rightarrow y_1 = (\frac{2}{9}e^{-2t} + \frac{1}{18}e^{-0/5t})u(t)$$

$$Y_r = \frac{-4}{3} s - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{A_r}{s+2} + \frac{B_r}{s+0/5} + \frac{2}{3} \rightarrow A_r = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{-4}{3s+2/5} = \frac{-4}{3}$$

$$B_r = \lim_{s \rightarrow -0/5} \frac{-4}{2s+2/5} = 0 \Rightarrow y_r = \frac{-4}{3} e^{-rt} u(t) + \frac{2}{3} \delta(t)$$

ت- شرایط اولیه در امتداد بردار ویژه نظیر مقدار ویژه ۲ است. پس :

$$\begin{bmatrix} x'_r \\ x''_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 1 \\ 0/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x''_r \end{bmatrix} \rightarrow |\lambda I - A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 1/5 & -1 \\ -0/5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2/5\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, -0/5$$

$$Az = \lambda z \xrightarrow{\lambda = -2} \begin{bmatrix} -1/5 & 1 \\ 0/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z''_r \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} z_r \\ z''_r \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0/5z_r + z_r = 0 \\ 0/5z''_r + z''_r = 0 \end{cases} \rightarrow p_r = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x(\cdot) = k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = (sI - A)^{-1} x(\cdot) = \begin{bmatrix} s+1/5 & -1 \\ -0/5 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{s^2 + 2/5s + 1} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0/5 & s+1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_r = x_r \rightarrow Y_r = \frac{k}{s^2 + 2/5s + 1} (s+0/5) = \frac{k}{s+2} \rightarrow y_r = ke^{-rt} \rightarrow k = 6 \Rightarrow x(\cdot) = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

۲- یک حلقه خازنی (خازنهای ۱ و ۲ و ۳ فاراد) داریم و کات ست سلفی نداریم. پس : $N = 7 - 1 - 0 = 6$

دو کات ست خازنی (خازنهای ۱ و ۲ و ۴ فاراد، خازنخای ۱ و ۳ و ۴ فاراد) داریم ولی حلقه سلفی نداریم. پس تعداد فرکانس طبیعی صفر برابر ۲ است و لذا تعداد فرکانس طبیعی غیر صفر برابر ۶-۲ یعنی ۴ خواهد بود.

تعیین صفرها : شاخه خازن ۱ فاراد سری با مقاومت ۱ اهم با اتصال کوتاه شده خروجی را صفر می کنند. پس : $s = -1$

شاخه سلف ۱ هانری موازی با مقاومت $0/5$ اهم و خازن ۱ فاراد با باز شدن خروجی را صفر می کنند. پس :

$$z = 0/5 \parallel \frac{1}{s} \parallel s = \infty \rightarrow y = 2 + s + \frac{1}{s} = 0 \rightarrow s^2 + 2s + 1 = 0 \rightarrow s = -1$$

حاصل موازی خازن ۱ فاراد با حاصل سری عناصر ۴ فاراد و ۱ اهم با باز شدن خروجی را صفر می کنند.

$$z = \frac{1}{s} \parallel (1 + \frac{1}{4s}) = \infty \rightarrow y = s + \frac{4s}{4s+1} = 0 \rightarrow s = 0, \frac{-5}{4}$$

صفر در مبدأ وجود ندارد. زیرا خروجی صفر نمی شود.

خازنهای ۲ و ۳ فاراد نقش صفر را در بینهایت دارند. پس تعداد صفرهای نامحدود ۲ و تعداد صفرهای محدود ۶-۲ یعنی ۴ هستند..

$$3- با توجه به شکل مدار داریم : I_r = I_y = -5I_x , I_x = I_r , V_r = 3I_y \rightarrow V_r = 3I_r , I_r = \frac{-1}{5} I_r = \frac{-1}{15} V_r$$

$$\begin{bmatrix} I_r \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{1}{3} \\ \cdot & \frac{-1}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ V_r \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} I_r \\ V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & -5 \\ \cdot & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} V_r \\ -I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 3 \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix}$$

چون رابطه‌ای برای V_r وجود ندارد فرمهای انتقال و ترکیبی اصلی و امپدانسی وجود نخواهد داشت.