

پاسخ تمرینات سری اول

سوال ۱:

a)

سری فوریه $\sin x$ در بازه خواسته شده خود $\sin x$ میشود. چرا که در بازه ذکر شده تناوب تابع همان سینوس میباشد و بدیهی است که سری فوریه آن خود تابع میشود. میتوانید با حساب کردن ضرایب فوریه نیز به این نتیجه برسید (از فایل حل تمرین شماره یک برای این امر استفاده کنید).

B,c)

14) $f(u) = u^2 \quad (-\pi < u < \pi)$ even function $\Rightarrow b_n = 0$

$$f(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi u}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi u}{L}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 du \Rightarrow \frac{1}{\pi} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = a_0 = \frac{2\pi^3}{3 \times 2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u^2 \cos nu du \Rightarrow \begin{array}{l} \text{D} \\ -2u \\ +2 \\ -0 \end{array} \begin{array}{l} \text{I} \\ \cos nu \\ \frac{\sin nu}{n} \\ -\frac{\cos nu}{n^2} \\ -\frac{\sin nu}{n^3} \end{array} = \left[\frac{u^2 \sin nu}{n} + \frac{2u \cos nu}{n^2} - \frac{2 \sin nu}{n^3} \right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{2\pi \cos n\pi}{n^2} = \frac{4 \cos n\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$f(u) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nu}{n^2}$$

15) $f(u) = u^2 \quad (0 < u < 2\pi)$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^2 du = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u^2 \cos nu du = \left[\frac{u^2 \sin nu}{n} + \frac{2u \cos nu}{n^2} - \frac{2 \sin nu}{n^3} \right]_0^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \times \frac{4\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u^2 \sin nu du = \left[\frac{u^2 \cos nu}{n} + \frac{2u \sin nu}{n^2} + \frac{2 \cos nu}{n^3} \right]_0^{2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \times \frac{-4\pi^2}{n} = \frac{-4\pi}{n} \Rightarrow f(u) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2} (\cos nu) - \frac{4\pi}{n} \sin nu \right]$$

d)

$$a_0 = 2 \int_0^1 \sin x \, dx = 2(1 - \cos 1)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \sin x \cos n\pi x \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} (\sin(1 + 2n\pi)x + \sin(1 - 2n\pi)x) \, dx \\ &= \left[\frac{-\cos(1 + 2n\pi)x}{(1 + 2n\pi)} - \frac{\cos(1 - 2n\pi)x}{(1 - 2n\pi)} \right]_0^1 = \frac{2(1 - \cos 1)}{1 - 4n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^1 \sin x \sin n\pi x \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} (\cos(1 - 2n\pi)x - \cos(1 + 2n\pi)x) \, dx \\ &= \left[\frac{\sin(1 - 2n\pi)x}{(1 - 2n\pi)} - \frac{\sin(1 + 2n\pi)x}{(1 + 2n\pi)} \right]_0^1 = \frac{4n\pi \sin 1}{1 - 4n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = 1 - \cos 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(1 - \cos 1)}{1 - 4n^2\pi^2} \cos 2n\pi x + \frac{4n\pi \sin 1}{1 - 4n^2\pi^2} \sin 2n\pi x \right]$$

سوال ۲:

کافیست در سریه فوریه به دست آمده x را برابر π قرار دهید.

به نکته زیر در حل سوال توجه کنید:

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

$$\frac{3 * \pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{2 * \pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

سوال ۳:

تابع $f(x)$ به صورت سینوسی ساده داده شده است. بنابراین $b_n = \frac{1}{n^2}$ و $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \sin x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} (\sin 3x - \sin x) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin^3 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} f(x) \sin 3x dx$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2} b_1 \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} b_3 \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{9} \right) = \frac{13\pi}{36}$$

سوال ۴:

$$f(x) = e^{-a|x|}$$

(*) جهت روی a : برای $a > 0$ این تابع مطلقاً اشتغال پذیر نیست، تبدیل فوریه نمی‌گیرد. برای $a < 0$ تبدیل فوریه دارد.



$$(*) F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} dx = \zeta$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{+ax} e^{-i\omega x} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a-i\omega} \left[e^{(a-i\omega)x} \right]_{-\infty}^0 \right] +$$

$$\zeta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-1}{a+i\omega} \left[e^{-(a+i\omega)x} \right]_0^{\infty} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a-i\omega} (1-0) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-1}{a+i\omega} [0-1] \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right) =$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

سوال ۵:

$$f(w) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} D(\lambda) \cos(\lambda w) d\lambda$$

$$D(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt = \int_0^{\pi} \sin t \cos(\lambda t) dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin t(1-\lambda) + \sin t(1+\lambda)}{r} dt$$

$$= \frac{-\cos t(1-\lambda)}{r(1-\lambda)} \Big|_0^{\pi} - \frac{\cos t(1+\lambda)}{r(1+\lambda)} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{1-\lambda^2} [\cos \pi \lambda + 1]$$

$$f(w) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1-\lambda^2} [\cos \pi \lambda + 1] \cos(\lambda w) d\lambda$$

$$\text{set } w = \pi/r \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{1-\lambda^2} [\cos \pi \lambda + 1] \cos\left(\frac{\lambda \pi}{r}\right) d\lambda = \pi/r$$

سوال ۶:

$$\begin{aligned} F_c(w) &= \operatorname{Re}\{F(w)\} = \operatorname{Re}\left\{\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-jwx} dx\right\} = \operatorname{Re}\left\{\int_0^{\infty} \left(\frac{u}{jw}\right)^{p-1} e^{-u} \frac{du}{jw}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\Gamma(p)}{(jw)^p}\right\} \\ &= \frac{\Gamma(p)}{w^p} \cos \frac{p\pi}{2} \end{aligned}$$

سوال ۱ امتیازی:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} &= \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} \\
&= \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(re^{ix})^{2n+1} - (re^{-ix})^{2n+1}}{2i(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(re^{ix})^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(re^{-ix})^{2n+1}}{2n+1} \right]
\end{aligned}$$

با استفاده از بسط مقابل، رابطه بالا را ساده می کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-1}{2} \ln \left(\frac{1-t}{1+t} \right)$$

$$\frac{1}{2i} \times \frac{-1}{2} \left[\ln \left(\frac{1-re^{+ix}}{1+re^{ix}} \right) - \ln \left(\frac{1-re^{-ix}}{1+re^{-ix}} \right) \right] = \frac{-1}{4i} \left[\ln \left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}} \times \frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}} \right) \right]$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{-1}{4i} \left[\ln \left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}} \times \frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4i} \left[\ln \left(\frac{1-re^{ix}}{1+re^{ix}} \times \frac{1+re^{-ix}}{1-re^{-ix}} \right)^{-1} \right] = \frac{1}{4i} \ln(-1) = \frac{1}{4i} \ln(e^{\pm i\pi})$$

$$= \frac{+1}{4i} (\pm \pi) = \begin{cases} \pi/4 & 0 < x < \pi \\ -\pi/4 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

سوال ۲ امتیازی:

