1) a) $(x+iy)^3+(x+iy)^2+1 \Rightarrow (x^3-3xy^2+x^2-y^2+1)+i(3x^2y-y^3+2xy)$

b) $\dfrac{(x+2)+iy}{(x-4)+iy} = \dfrac{(x+2)(x-4)+y^2}{(x-4)^2+y^2} + i\,\dfrac{(x-4)y-(x+2)y}{(x-4)^2+y^2}$

c) $\cos(x+iy)\,\cancel{\operatorname{Im}(z)}^{\,y} \Rightarrow \cos x\cos(iy)\,y - \sin x\sin(iy)\,y \Rightarrow \cos x\cosh(y)\,y - i\sin x\sinh(y)\,y$

d) $\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} \Rightarrow \dfrac{e^{x+iy}+e^{-x-iy}}{2} \Rightarrow \dfrac{e^{x}\times e^{iy}+e^{-x}\times e^{-iy}}{2} \Rightarrow \dfrac{e^{x}(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2}$

---

2) $z^6+9z^3+8 \Rightarrow (z^3-1)(z^3-8)$ → $z^3=1$, → $z^3=8$

$z^3 = e^{i2k\pi} \Rightarrow z = e^{i2k\pi/3}$ $k=0,1,2$ / $z^3 = 8e^{i2k\pi}$, $z = 2e^{i2k\pi/3}$, $k=0,1,2$

Scanned with CamScanner

س

$f(z) = z^2 \cdot Im(\bar{z})^2 = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$u(x,y) = ?$
$v(x,y) = ?$

$\to f(z) = (x+iy)^2 \cdot Im\left((x-iy)^2\right) =$

$\to f(z) = (x^2 - y^2 + i2xy) \times (-2xy) =$

$= \underbrace{2xy(y^2 - x^2)}_{u} + i\,\underbrace{(-4x^2y^2)}_{v}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y^3 - 6x^2y$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial v}{\partial y}$?

$\frac{\partial v}{\partial y} = -8x^2y$ $\qquad \downarrow$

(در چه نقاطی ؟)

$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy^2 - 2x^3$

$-\frac{\partial v}{\partial x} = 8xy^2$

$\to 2y^3 - 6x^2y = -8x^2y$

$\underbrace{2y^3 - 6x^2y + 8x^2y}_{2x^2y} = 0 \to y = 0$ $\quad$ یا

$\to y^2 = -x^2 \to y = \pm x$

سوال ۲ صفحه 629 کریزیگ

$$f(z) = iz\bar{z} = i(x+iy)(x-iy)$$

$$= i(x^2+y^2) \longrightarrow u(x,y)=0$$

$$v(x,y) = x^2+y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

فقط در $x,y=0$ مشتق دارد، در باقی جاها خیر. پس تحلیلی نیست اصلاً

سوال ۳ صفحه 629 کریزیگ

$$f(z) = e^{-2x}(\cos 2y - i\sin 2y)$$

$$u(x,y) = e^{-2x}\cos 2y \quad , \quad v(x,y) = -e^{-2x}\sin 2y$$

$$u_x = -2e^{-2x}\cos 2y \quad , \quad u_y = -2e^{-2x}\sin 2y$$

ادامه پاسخ سوال ۳ ص 62 درس

AM 07

$$v_x = +2e^{-2x}\sin 2y \quad و \quad v_y = -2e^{-2x}\cos 2y$$

08

هموسازی برقرار است.

09

و دیده می‌شود که:

10

$$u_x = v_y \quad و \quad u_y = -v_x$$

11

پس صحیح است.

$$f(z) = \frac{1}{z - z^5}$$

۶۲۹ ۲/۱ کتاب درس

$f'(z_0)$

وجود دارد اگر

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

وجود داشته باشد

$$f(z) = g(h(z)) = g \circ h(z)$$

$$h(z) = z - z^5 \qquad g(w) = \frac{1}{w}$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(h(z)) - g(h(z_0))}{z - z_0} =$$

$$= \lim \frac{g(h(z)) - g(h(z_0))}{\underbrace{h(z)}_{w} - \underbrace{h(z_0)}_{w_0}} \cdot \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} =$$

Scanned with CamScanner

$$= \lim \underbrace{\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} \cdot \frac{w-w_0}{z-z_0}}$$

اگر که این حد وجود داشته باشد

یعنی حد $f(z)$ وجود دارد.

پس اگر $g(w)$ مشتق داشته باشد و $h(z)$ هم

مشتق داشته باشد آنگاه $f(z)$ هم

مشتق دارد.

$g(w) = \frac{1}{w}$

$h(z) = z - z^5$

~~$h(z)$~~

به راحتی (هم با تعریف مشتق و هم با قضیه ریمان)

اثبات می‌شود که $\frac{1}{w}$ در نقاط غیر صفر

مشتق‌پذیر است.

$z-z^5$ هم همه جا مشتق‌پذیر

است.

پس

$f(z) = \frac{1}{z-z^5}$ ⟵

$\left.\begin{array}{l} z \neq \pm i \\ z \neq 0 \\ z \neq \pm 1 \end{array}\right\}$ به شرط که

⟸ مشتق‌پذیر است در همه نقاط به جز این نقاط، تحلیلی

1398

ص ۱۲۶ تا سه دیدم کشیدم

AM

a) $u = e^x \cos y$

$u_x = e^x \cos y$, $u_{xx} = e^x \cos y$ $\Longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_y = -e^x \sin y$, $u_{yy} = -e^x \cos y$

میتوانیم ها هم برابر است.

هم ارزیست.

$v = ?$

PM

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$u_x = e^x \cos y = v_y \xRightarrow{\int y} v = e^x \sin y + h(x)$

$-u_y = v_x \Rightarrow +e^x \sin y = e^x \sin y + h'(x) \to h'(x) = 0$

$h'(x) = c \Rightarrow \boxed{v = e^x \sin y + c}$

$c = 0$

$u(x,y) + i v(x,y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$= e^x e^{iy} = e^{x+iy} = \boxed{e^z = f(z)}$

b) $u = (x^2 - y^2)^2$

$u_x = 4x(x^2 - y^2)$, $u_{xx} = 12x^2 - 4y^2$

$u_y = -4y(x^2 - y^2)$, $u_{yy} = -4x^2 + 12y^2$

$u_{xx} + u_{yy} \neq 0 \longrightarrow \times$ [illegible]

d) $u = x^2 - y^2 - 2x + 3y$

$u_x = 2x - 2 \quad u_{xx} = 2 \quad \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$ ✓

$u_y = -2y + 3 \rightarrow u_{yy} = -2$

[illegible] لاپلاس برقرار

u همساز است ✓

$V = ?$

$u_x = v_y \quad , \quad -u_y = v_x$

$u_x = 2x - 2 = v_y \Rightarrow v = 2xy - 2y + h(x)$

$v_x = 2y + h'(x) = -u_y = 2y - 3 \Rightarrow h'(x) = -3$

$\Rightarrow h(x) = -3x + C \quad \Rightarrow v = 2xy - 2y - 3x + c$

$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - 2x + 3y$

$+ i2xy - 2iy - 3ix + ic =$

1398

01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

ادامه [illegible]

Scanned with CamScanner

ادامه تمرین d) صفحه ۱۶۴

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - 2x + 3y + i2xy - 2iy - 3ix + ic$$

$$= \left(x + iy - 1 - \frac{3i}{2}\right)^2 = \left(z - \frac{3i}{2} - 1\right)^2 = f(z)$$

$$\left(\left(\text{در } h(x)\right) C = \frac{-5}{4} + 3i\right)$$

e) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$u_x = \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$u_{xx} = \dfrac{-2x(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}$

توان x^5 دارد

$u_y = \dfrac{ax(x^2+y^2) - 2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$u_{yy} = \dfrac{-2x(x^2+y^2)^2 + 8y^2(x^2+y^2)x}{(x^2+y^2)^4}$ توان x^5 ندارد

$u_{xx} + u_{yy} \neq 0$. هارمونیک نیست