پاسخ امتحان میان ترم دوم ریاضی مهندسی ۱۴۰۲/۲/۲۰

۱- $$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \rightarrow \sqrt[3]{8i} = \begin{cases} 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i \\ 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = -\sqrt{3} + i \\ 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = -2i \end{cases}$$

۲- $$f(z) = \frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{z-(1-i)+(1-i)+2} = 1 - \frac{1}{3-i}\frac{2}{1+\frac{z-(1-i)}{3-i}}$$

$$f(z) = 1 - \frac{1}{3-i}\frac{2}{1+\frac{z-(1-i)}{3-i}} = 1 - \frac{2}{3-i}\left[1 + \frac{z-(1-i)}{3-i} + \frac{(z-(1-i))^2}{(3-i)^2} + \dots\right]$$

$$f(z) = \frac{1-i}{3-i} + \frac{2}{(3-i)^2}(z-(1-i)) + \frac{2}{(3-i)^3}(z-(1-i))^2 + \dots$$

فاصله نقطه z=1-i با نقطه منفرد z=-2 برابر است با $\sqrt{10}$ پس شعاع همگرایی برابر $\sqrt{10}$ است.

۳- طول نیم دایره C برابر π است. $L = \pi$

$$\left|\int_C (x^2+iy^2)dz\right| \le ML \;,\; x^2+y^2 = 1 \rightarrow f(z) = x^2+iy^2 = 1-y^2+iy^2 \rightarrow |f(z)| = \sqrt{(1-y^2)^2+y^4}$$

$$|f(z)| = \sqrt{1-2y^2+2y^4} \rightarrow |f(z)|' = 0 \rightarrow -4y+8y^3 = 0 \rightarrow y = 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow |f(0)| = 1, |f(\frac{1}{\sqrt{2}})| = 0.5 \rightarrow M = 1$$

$$\left|\int_C (x^2+iy^2)dz\right| \le \pi$$

۴- الف-

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{z}dz = \int_{-2}^{-1}\frac{x}{x}dx + \int_{-1}^{0}\frac{x-i(x+1)}{x+i(x+1)}dx + \int_{1}^{2}\frac{-iy}{iy}dy + \int_{0}^{-2}\frac{x-i(x+2)}{x+i(x+2)}dx$$

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{z}dz = 1 + \int_{-1}^{0}\frac{(1-i)x-i}{(1+i)x+i}dx - 1 + \int_{0}^{-2}\frac{(1-i)x-2i}{(1+i)x+2i}dx = \frac{1-i}{1+i}\int_{-1}^{0}\frac{x-\frac{i}{1-i}}{x+\frac{i}{1+i}}dx + \frac{1-i}{1+i}\int_{0}^{-2}\frac{x-\frac{2i}{1-i}}{x+\frac{2i}{1+i}}dx$$

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{z}dz = -i\int_{-1}^{0}\frac{x+\frac{i}{1-i}-\frac{2i}{1-i}}{x+\frac{i}{1+i}}dx - i\int_{0}^{-2}\frac{x+\frac{2i}{1-i}-\frac{4i}{1-i}}{x+\frac{2i}{1+i}}dx = -i\int_{-1}^{0}\left[1-\frac{\frac{2i}{1-i}}{x+\frac{i}{1+i}}\right]dx - i\int_{0}^{-2}\left[1-\frac{\frac{4i}{1-i}}{x+\frac{2i}{1+i}}\right]dx$$

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{z}dz = -i + \frac{-2}{1-i}\mathrm{Log}(x+\frac{i+1}{2})\Big|_{-1}^{0} + 2i + \frac{-4}{1-i}\mathrm{Log}(x+i+1)\Big|_{0}^{-2}$$

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{z}dz = i - \frac{2}{1-i}(\mathrm{Log}(\frac{i+1}{2}) - \mathrm{Log}(\frac{i-1}{2})) - \frac{4}{1-i}(\mathrm{Log}(i-1) - \mathrm{Log}(i+1))$$

$$\oint_C \frac{\bar{z}}{z}dz = i - \frac{2}{1-i}\mathrm{Log}(-i) - \frac{4}{1-i}\mathrm{Log}(i) = i - \frac{1}{1-i}\mathrm{Log}(-1) - \frac{1}{1-i}\mathrm{Log}(1) = i - \frac{1}{1-i}\mathrm{Log}(-1)$$

$$\oint_C \frac{\overline{z}}{z}dz = i - \frac{\pi i}{۱-i} = \frac{۱+(۱-\pi)i}{۱-i} = \frac{\pi}{۲} + \frac{۲-\pi}{۲}i$$

ب- تابع داخل انتگرال تحلیلی بوده و بنا بر قضیه اساسی کوشی ، حاصل انتگرال بر روی مسیر داده شده صفر است.

پ- نقطه منفرد z=i در درون مسیر داده شده قرار دارد که مرتبه آن سه است. پس :

$$R = \frac{۱}{(۳-۱)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{۳-۱}}{dz^{۳-۱}}[(z-i)^{۳} f(z)] = \frac{۱}{۲}\lim_{z\to i}\frac{d^{۲}}{dz^{۲}}[z] = \frac{۱}{۲}\lim_{z\to i}(۰) = ۰ \to \oint_C \frac{z}{(z-i)^{۳}}dz = ۲\pi i R = ۰$$

۵- بخش تحلیلی ندارد و بخش اصلی آن برابر است با :

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)^{۳}} = \frac{z-i+i}{(z-i)^{۳}} = i(z-i)^{-۳} + (z-i)^{-۲}$$