پاسخ کوییز اول ریاضیات مهندسی

سوال اول

مثال) سری فوریه تابع متناوب $f(x)=x|x|$ را در بازه $-\pi<x<\pi$ با دوره تناوب 2π بیابید.

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2 & -\pi<x<0\\ x^2 & 0<x<\pi\end{cases}$$

$L=\pi$ تابع فرد است $(a_0=a_n=0)$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x|x|\sin nx}_{\text{تابع زوج}}\,dx$$

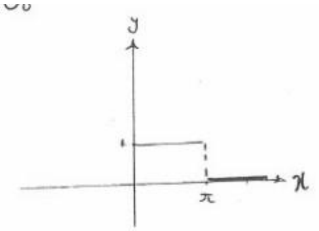
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

x^2	$\sin nx$
$2x$ (+)	$-\frac{1}{n}\cos nx$
2 (−)	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0 (+)	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi^2}{n}(-1)^n+\frac{2}{n^3}(-1)^n-\frac{2}{n^3}\right]$$

$$f(x)=x|x|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi^2}{n}(-1)^n+\frac{2}{n^3}(-1)^n-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx \quad \text{سری فوریه}$$

سوال دوم



در انتگرال سینوسی فوریه $A(\omega) = 0$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\omega x\,dx = \frac{-2}{\pi\omega}\cos\omega x\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-\cos\omega\pi}{\omega}\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega\pi}{\omega}\sin\omega x\,d\omega$$ انتگرال فوریه سینوسی

برای محاسبه حاصل انتگرال باید در انتگرال فوریه به جای عبارت $x = \pi$ قرار دهیم که یک نقطه ناپیوستگی برای تابع محسوب می شود.

$$\frac{\cancel{f(\pi^+)}^{\,0} + \cancel{f(\pi^-)}^{\,1}}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega\pi}{\omega}\sin\pi\omega\,d\omega$$

$$\longrightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos\omega\pi}{\omega}\sin\pi\omega\,d\omega = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos\pi x}{x}\sin\pi x\,dx = \frac{\pi}{4}$$

سوال سوم

مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ را یافته و به کمک آن حاصل $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega}}{(1+i\omega)^2}d\omega$ را بیابید.

$$F\{f(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}0\times e^{-i\omega x}\,dx+\int_{0}^{\infty}xe^{-x}e^{-i\omega x}\,dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}x\,e^{-(1+i\omega)x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-x}{1+i\omega}e^{-(1+i\omega)x}-\frac{1}{(1+i\omega)^2}e^{-(1+i\omega)x}\right]_{0}^{\infty}$$

$$\begin{array}{c|c} x & e^{-(1+i\omega)x} \\ \hline 1 \quad + & \frac{1}{-(1+i\omega)}e^{-(1+i\omega)x} \\ \quad - & \\ 0 & \frac{1}{(1+i\omega)^2}e^{-(1+i\omega)x} \end{array}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-0-0-\left(0-\frac{1}{(1+i\omega)^2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1+i\omega)^2}=\hat{f}(\omega)$$

نکته: $e^{-\infty}=0$

برای محاسبه انتگرال ابتدا تبدیل فوریه معکوس را می‌نویسیم:

$$F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1+i\omega)^2}e^{i\omega x}\,d\omega$$

و سپس $x=1$ قرار می‌دهیم

$$x=1\xrightarrow{\text{پیوسته}}f(1)=1\times e^{-1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+i\omega)^2}e^{i\omega}\,d\omega\longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+i\omega)^2}e^{i\omega}\,d\omega=\frac{2\pi}{e}$$