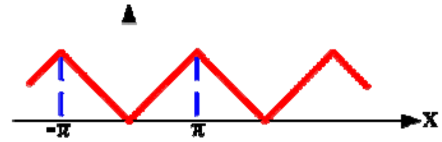
سری فوریه

مثال ۱ :

$$f(x)=\begin{cases}-x & : \ -\pi \le x \le 0 \\ x & : \ 0 \le x \le \pi\end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi)=f(x)$$



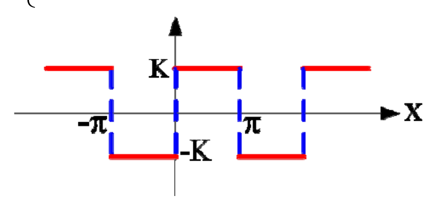
$$a_0=\pi \quad , \quad a_n=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & : n \text{ فرد} \\ 0 & : n \text{ زوج}\end{cases} \quad , \quad b_n=0$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos(x)+\frac{\cos(3x)}{9}+\frac{\cos(25x)}{25}+\cdots\right]$$

$$x=0 \ \rightarrow \ \frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

مثال ۲ :

$$f(x)=\begin{cases}-K & : \ -\pi < x < 0 \\ K & : \ 0 < x < \pi\end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi)=f(x)$$



$$a_0=a_n=0 \quad , \quad b_n=\frac{2K}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$$f(x)=\frac{4K}{\pi}\left[\sin(x)+\frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\sin(5x)}{5}+\cdots\right]$$

تساوی پارسوال

مثال ۳ : همان مثال ۱

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx=\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right]$$

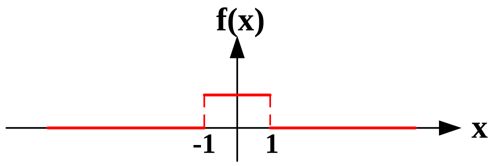
$$\frac{2\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{\substack{n=1\\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^2} \rightarrow \sum_{\substack{n=1\\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$$

انتگرال فوریه

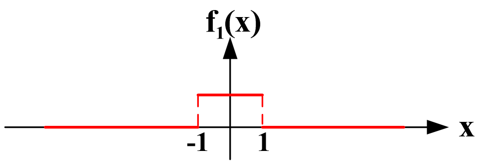
مثال ۴ :

$$f(x)=\begin{cases}1 & : \ 0<x<1 \\ 0 & : \ x>1\end{cases}$$



تمدید زوج :

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & : \ -1<x<1 \\ 0 & : \ |x|>1\end{cases}$$



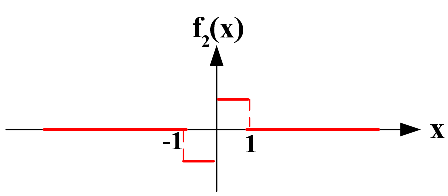
$$A(w)=2\int_0^{\infty} f(v)\cos(wv)dv=2\int_0^{1}\cos(wv)dv=\frac{2\sin(w)}{w}$$

$$B(w)=0$$

$$f(x)\cong\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{2\sin(w)\cos(wx)}{w}dw=\begin{cases}1 & : \ x<1 \\ \dfrac{1}{2} & : \ x=1 \\ 0 & : \ x>1\end{cases}$$

تمدید فرد :

$$f_2(x)=\begin{cases}۱ & : \ 0<x<1 \\ -۱ & : \ -1<x<0 \\ 0 & : \ |x|>1\end{cases}$$



$$A(w)=0$$

$$B(w)=2\int_0^{\infty} f(v)\sin(wv)dv$$

$$=2\int_0^{\infty}\sin(wv)dv \ = \ \frac{2\left(1-\cos(w)\right)}{w}$$

$$f(x) \cong \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(w)}{w}\sin(wx)dw = \begin{cases} 1 & : \quad 0<x<1 \\ \frac{1}{2} & : \quad x=1 \\ 0 & : \quad x=0\,,\, x>1 \end{cases}$$

برای تمدید فرد می‌توان نوشت :

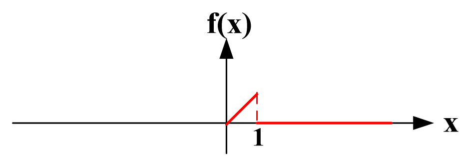
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(w)}{w}\sin(wx)dw = \frac{1}{2}$$

$$x=1 \to \int_0^{\infty}\frac{\sin(w)}{w}dw - \int_0^{\infty}\frac{\sin(2w)}{2w}dw = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\sin(w)}{w}dw \Rightarrow I - \frac{I}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

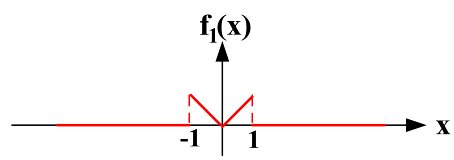
مثال ۵ : تبدیل فوریه کسینوسی

$$f(x) = \begin{cases} x & : \quad 0<x<1 \\ 0 & : \quad x>1 \end{cases}$$



تمدید زوج :

$$f_1(x) = \begin{cases} |x| & : \quad -1<x<1 \\ 0 & : \quad |x|>1 \end{cases}$$



$$g_c(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(wx)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{1} x\cos(wx)dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[x\frac{\sin(wx)}{w}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(wx)}{w}dx \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(w)}{w} + \frac{\cos(wx)}{w^2}\Big|_0^1 \right]$$

$$g_c(w) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(w)}{w} + \frac{\cos(w)-1}{w^2} \right]$$

$$f(x) \cong \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin(w)}{w} + \frac{\cos(w)-1}{w^2} \right]\cos(wx)dw$$

$$= \begin{cases} x & : \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & : \quad x>1 \\ \frac{1}{2} & : \quad x=1 \end{cases}$$

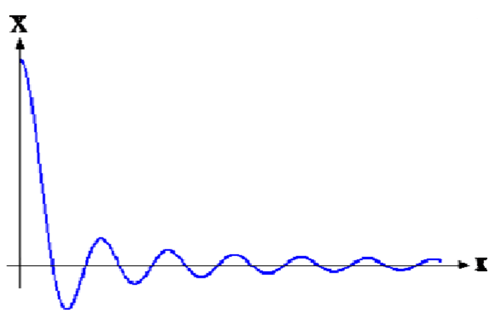
$$x=0 \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin(w)}{w} + \frac{\cos(w)-1}{w^2} \right] dw = 0$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(w)}{w}dw = \int_0^{\infty}\frac{1-\cos(w)}{w^2}dw$$

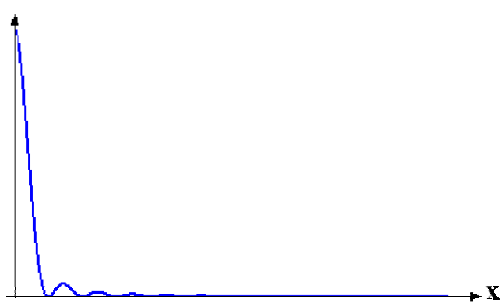
$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty}\frac{1-\cos(w)}{w^2}dw = \int_0^{\infty}\frac{2\sin^2(\frac{w}{2})}{w^2}dw$$

$$w=2x \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

sin(x)



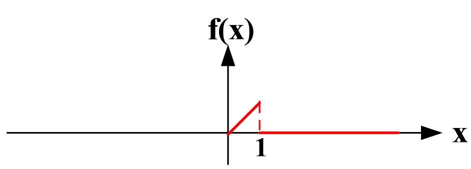
$\frac{\sin^2(x)}{x^2}$



از نکات قابل توجه یکسان بودن سطح زیر منحنی‌های فوق است.

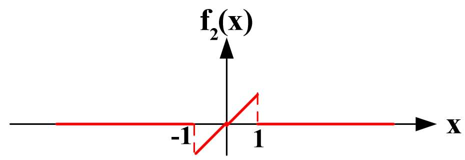
مثال ۶ : تبدیل فوریه سینوسی

$$f(x) = \begin{cases} x & : \quad 0<x<1 \\ 0 & : \quad x>1 \end{cases}$$



تمدید فرد :

$$f_2(x)=\begin{cases} x & : \ -1<x<1 \\ 0 & : \ |x|>1\end{cases}$$



$$g_s(w)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(wx)dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 x\sin(wx)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-x\frac{\cos(wx)}{w}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{\cos(wx)}{w}dx\right]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{\cos(w)}{w}+\frac{\sin(wx)}{w^2}\Big|_0^1\right]$$

$$g_s(w)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(w)}{w^2}-\frac{\cos(w)}{w}\right]$$

$$f(x)\cong\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin(w)}{w^2}-\frac{\cos(w)}{w}\right]\sin(wx)dw$$

$$=\begin{cases}x & : \ 0\le x<1\\ 0 & : \ x>1 \\ \frac{1}{2} & : \ x=1\end{cases}$$

$$x=1\to\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin^2(w)}{w^2}-\frac{\sin(w)\cos(w)}{w}\right]dw=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2(w)}{w^2}dw-\overbrace{\int_0^\infty\frac{\sin(w)\cos(w)}{w}dw}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

مثال ۷ : تمدید به فرم دیگر

$$f(x)=\begin{cases}x & : \ 0<x<1\\ 0 & : \ x>1\end{cases}$$

می‌توان بقیه فاصله‌ای که تابع تعریف نشده است را، هر مقدار یا تابع دیگری فرض نمود که ساده ترین آن مقدار صفر است.

$$f_3(x)=\begin{cases}x & : \ 0<x<1\\ 0 & : \ x>1\ ,\ x<0\end{cases}$$

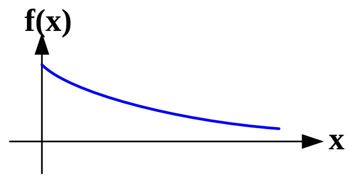
پس از محاسبه انتگرال فوریه تابع فوق خواهیم داشت :

$$f(x)\cong\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(\frac{\sin(w)}{w}+\frac{\cos(w)-1}{w^2}\right)\cos(wx)+\left(\frac{\sin(w)}{w^2}-\frac{\cos(w)}{w}\right)\sin(wx)\right]dw$$

انتگرالهای لاپلاس

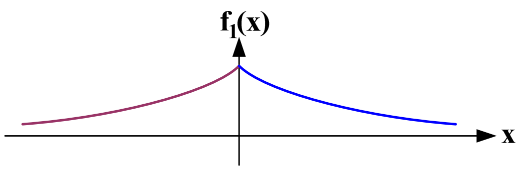
نمایش تابع زیر به انتگرال فوریه را بدست می‌آوریم :

$$f(x)=e^{-kx} \quad : \quad k>0\ ,\ x>0$$



۱- تمدید زوج

$$f_1(x)=\begin{cases}e^{-kx} & : \ x>0\\ e^{kx} & : \ x<0\end{cases}\quad ,\ k>0$$



$$B(w)=0$$

$$A(w)=2\int_0^\infty f(v)\cos(wv)dv$$

$$=2\int_0^\infty e^{-kv}\cos(wv)dv$$ تبدیل لاپلاس $\cos(wv)$

پس : $$A(w)=\frac{2k}{k^2+w^2}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{k\cos(wx)}{k^2+w^2}dw=\begin{cases}e^{-kx} & : \ x>0\\ 1 & : \ x=0\end{cases}$$

$$I=\int_0^\infty\frac{\cos(wx)}{k^2+w^2}dw=\frac{\pi}{2k}e^{-kx} \ : x>0$$

۲- تمدید فرد

$$f_2(x)=\begin{cases}e^{-kx} & : \ x>0\\ -e^{kx} & : \ x<0\end{cases}\quad ,\ k>0$$

$$A(w) = 0$$

$$B(w) = 2\int_0^\infty f(v)\sin(wv)dv$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-kv}\sin(wv)dv$$ تبدیل لاپلاس sin(wv)

پس : $$B(w) = \frac{2w}{k^2 + w^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\sin(wx)}{k^2+w^2}dw = e^{-kx} \quad : x > 0$$

$$II = \int_0^\infty \frac{w\sin(wx)}{k^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2}e^{-kx} : x>0$$

اگر از انتگرال نوع اول نسبت به x مشتق گرفته شود،

انتگرال دوم حاصل می‌شود.