بررسی برخی از توابع مختلط

۱- تابع نمائی $f(z)=e^z$

$$f(z)=e^{x+iy}=e^x\left(\cos(y)+i\sin(y)\right)$$

$$u=e^x\cos(y)\quad,\quad v=e^x\sin(y)$$

این تابع دوره ای با دوره $2\pi i$ است.

$$e^{z+2\pi i}=e^{x+iy+2\pi i}=e^x\left(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)\right)$$

$$=e^x\left(\cos(y)+i\sin(y)\right)=e^z$$

$$|e^z|=e^x\quad,\quad \arg(e^z)=y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos(y)\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin(y)\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos(y)$$

پس این تابع تام است.

$$w'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\to w'=e^x\cos(y)+i\,e^x\sin(y)$$

$$=e^z=w$$

نکته مهم : اگر w تحلیلی باشد، آنگاه e^w نیز تحلیلی است.

اثبات :

$$e^w=e^{u+iv}=e^u\left(\cos(v)+i\sin(v)\right)=U+iV$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=e^u\frac{\partial u}{\partial x}\cos(v)+e^u\frac{\partial v}{\partial x}(-\sin(v))$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=e^u\frac{\partial u}{\partial y}\cos(v)+e^u\frac{\partial v}{\partial y}(-\sin(v))$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=e^u\frac{\partial u}{\partial x}\sin(v)+e^u\frac{\partial v}{\partial x}(\cos(v))$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=e^u\frac{\partial u}{\partial y}\sin(v)+e^u\frac{\partial v}{\partial y}(\cos(v))$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

شرایط تحلیلی بودن w

پس :

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}\quad,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

برخی از خواص تابع نمائی :

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}\qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$$

$$(e^z)^c=e^{cz}\qquad [e^{w(z)}]'=e^{w(z)}\,w'(z)$$

این تابع دارای نقطه صفر نیست.

۲- توابع مثلثاتی

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\quad,\quad \cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$tg(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}\quad,\quad cotg(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

تابع نمائی همه جا تحلیلی بوده، لذا تابع سینوس و کسینوس نیز تحلیلی هستند.

$$\frac{d}{dz}\left[\sin(z)\right]=\cos(z)\qquad \frac{d}{dz}\left[\cos(z)\right]=-\sin(z)$$

$$z=x+iy\to\sin(z)=\frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}$$

$$\sin(z)=\frac{\left[e^{-y}\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)-e^{y}\left(\cos(x)-i\sin(x)\right)\right]}{2i}$$

$$\mathbf{\sin(z)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)}\qquad ۱$$

$$\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin(x)\cos(iy)+\cos(x)\sin(iy)$$

$$\begin{cases}\sin(iy)=i\sinh(y)\\ \cos(iy)=\cosh(y)\end{cases}\qquad ۲$$

مشابه عملیات فوق را می توان برای تابع کسینوس انجام داد ، در این صورت می توان نوشت :

$$\mathbf{\cos(z)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)}\qquad ۳$$

از روابط ۱ و ۳ داریم :

$$\begin{cases}|\sin(z)|^2=\sin^2(x)+\sinh^2(y)\\ |\cos(z)|^2=\cos^2(x)+\sinh^2(y)\\ \sin^2(z)+\cos^2(z)=\cosh^2(y)-\sinh^2(y)=1\end{cases}$$

صفرهای تابع سینوس و کسینوس همان صفرهای تابع حقیقی هستند.

اثبات :

$$\sin(z)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)=0$$

$$\begin{cases}\sin(x)\cosh(y)=0\\ \cos(x)\sinh(y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin(x)=0\\ \sinh(y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=n\pi\\ y=0\end{cases}$$

$$\cos(z)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)=0$$

$$\begin{cases}\cos(x)\cosh(y)=0\\ -\sin(x)\sinh(y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos(x)=0\\ \sinh(y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=n\pi+\frac{\pi}{2}\\ y=0\end{cases}$$

تابع $tg(z)$ جز در صفرهای تابع $\cos(z)$ تحلیلی است.

$$\big(tg(z)\big)'=\frac{1}{\cos^2(z)}$$

تابع $cotg(z)$ جز در صفرهای تابع $\sin(z)$ تحلیلی است.

$$\big(cotg(z)\big)'=\frac{-1}{\sin^2(z)}$$

۳- تابع لگاریتم $f(z)=Log(z)$

$$z=re^{i\theta}\rightarrow f(z)=Log(r)+i\theta$$

تابع لگاریتم تابعی چند مقدار است. زیرا θ بخش اصلی آرگومان z است.

برای $-\pi<\theta<\pi$ مقدار حاصل لگاریتم را مقدار اصلی لگاریتم گویند.

در این فاصله بجز $z=0$ تابع فوق تحلیلی است.

$$f(z)=\frac{1}{2}Log(x^2+y^2)+i\tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

$$u=\frac{1}{2}Log(x^2+y^2)\qquad v=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$x^2+y^2\neq 0\ \Rightarrow\ x,y\neq 0\rightarrow z\neq 0$$

$$f'(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

$$f'(z)=\frac{1}{z}$$

برخی از خواص تابع لگاریتم :

$$Log(z_1z_2)=Log(z_1)+Log(z_2)$$

$$Log(\frac{z_1}{z_2})=Log(z_1)-Log(z_2)$$

$$Log(z_1^{z_2})=z_2Log(z_1)$$

مثال ۱ : $w=i^i$

$$Log(w)=i\,Log(i)=iLog(e^{\frac{\pi}{2}i})=i\,(\frac{\pi}{2}i)=-\frac{\pi}{2}$$

$$w=i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

مثال ۲ :

$$Log(z_1z_2)=Log(z_1)+Log(z_2)\ ,\quad z_1=z_2=-1$$

$Log(z_1^2)=2Log(z_1)\Rightarrow Log(-1)=0$ اشتباه است.

$$z_1=-1=e^{\pi i}\Rightarrow Log(-1)=\pi i$$

۴- توابع مثلثاتی وارون

$$w=\sin^{-1}(z)\rightarrow\ \sin(w)=z$$

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\Rightarrow\ e^{iw}-e^{-iw}-2iz=0$$

$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0\Rightarrow\ e^{iw}=iz\pm\sqrt{1-z^2}$$

$$w_1=-i\,Log(iz+\sqrt{1-z^2})\ ,\quad w_2=-i\,Log(iz-\sqrt{1-z^2})$$

می توان نشان داد : $w_1+w_2=(2k+1)\pi$

w_1 به عنوان مقدار اصلی انتخاب می شود.

۴ $$\sin^{-1}(z)=-i\,Log(iz+\sqrt{1-z^2})$$

مشابه فوق می توان عمل نموده و به آسانی بدست آورد :

۵ $$\cos^{-1}(z)=-i\,Log(z+\sqrt{z^2-1})$$

۶ $$tg^{-1}(z)=\frac{i}{2}Log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

توابع مثلثاتی وارون توابعی چند مقدار هستند و در بخشی از صفحه z می توان آنها را تک مقدار در نظر گرفت.

$$\left[\cos^{-1}(z)\right]'=\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\qquad \left[\sin^{-1}(z)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\left[tg^{-1}(z)\right]'=\frac{1}{1+z^2}$$

۵- توابع هذلولی

$$\sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}\ ,\quad \cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$tgh(z)=\frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}\ ,\quad cotgh(z)=\frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$$

تابع نمائی همه جا تحلیلی بوده ، لذا تابع sinh و cosh نیز تحلیلی هستند.

$$\frac{d}{dz}\left[\sinh(z)\right] = \cosh(z) \quad \frac{d}{dz}\left[\cosh(z)\right] = \sinh(z)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x}\left(\cos(y)+i\sin(y)\right) - e^{-x}\left(\cos(y)-i\sin(y)\right)\right]$$

$$\sinh(z) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y) \qquad ۷$$

مشابه عملیات فوق را می توان برای تابع cosh انجام داد ، در این صورت می توان نوشت :

$$\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y) \qquad ۸$$

تعیین صفرهای توابع هذلولی

$$\sinh(z) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y) = 0$$

$$\begin{cases}\sinh(x)\cos(y) = 0\\ \cosh(x)\sin(y) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sinh(x) = 0\\ \sin(y) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = n\pi\end{cases}$$

پس صفرهای sinh موهومی محض است.

$$\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y) = 0$$

$$\begin{cases}\cosh(x)\cos(y) = 0\\ \sinh(x)\sin(y) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos(y) = 0\\ \sinh(x) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = n\pi + \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

پس صفرهای cosh موهومی محض است.

تابع tgh(z) جز در صفرهای تابع cosh(z) تحلیلی است.

۶- توابع هذلولی وارون

می توان مشابه توابع وارون مثلثاتی عمل نمود و نشان داد :

$$\sinh^{-1}(z) = \mathrm{Log}(z + \sqrt{1+z^2}) \qquad ۹$$

$$\cosh^{-1}(z) = \mathrm{Log}(z + \sqrt{z^2-1}) \qquad ۱۰$$

$$\mathrm{tgh}^{-1}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad ۱۱$$