انتگرال

انتگرال نامعین :

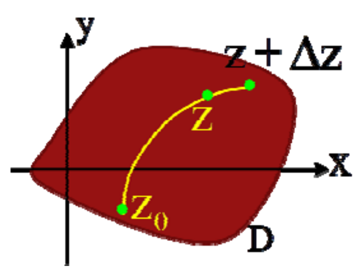
فرض کنید تابع f(z) در ناحیه D تحلیلی باشد ، نقاط z , z_0 در D انتخاب شده اند. انتگرال زیر بستگی به مسیر ندارد که تابعی از z , z_0 است و با فرض ثابت بودن z_0 تابعی از z خواهد بود.

$$\int_{z_0}^{z} f(z^*)dz^* = F(z)$$

F(z) را تابع اولیه f(z) گویند.

ثابت می شود که تابع F(z) تحلیلی است و مشتق آن تابع f(z) است.

اثبات :



$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z^*)dz^* - \int_{z_0}^{z} f(z^*)dz^*$$

$$=\int_{z}^{z+\Delta z} f(z^*)dz^*$$

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z^*)dz^*$$

$$f(z)=\frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} dz^* \rightarrow f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz^*$$

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z}^{z+\Delta z} f(z^*)dz^* - \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz^*\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(z^*)-f(z)]dz^*$$

چون تابع f(z) تحلیلی است ، پس پیوسته بوده و می توان نوشت :

$$|z-z^*|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(z^*)|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(z^*)-f(z)||dz^*|$$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}\varepsilon|dz^*|$$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \le \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|dz^*|$$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| \le \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}|\Delta z|=\varepsilon$$

با فرض $\Delta z \rightarrow 0$ خواهیم داشت :

$$\lim_{\Delta z\rightarrow 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$$

قضیه :

تابع اولیه هر تابع تحلیلی ، تحلیلی است و این تابع تحلیلی با تقریب یک ثابت حساب می شود.

اثبات :

اگر تابع G(z) , F(z) هر دو تابع اولیه f(z) باشند ، داریم :

$$F'(z)-G'(z)=f(z)-f(z)=0$$

فرض کنید : $w=F(z)-G(z)=u+iv$

$$w'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

مشتق توابع u و v نسبت به هر دو متغیرشان صفر هستند.

پس :

$$u=c_1\ ,\ v=c_2 \Rightarrow w=c_1+ic_2$$

قضیه ماکزیمم مدول

فرض کنید :

تابع f(z) روی و درون دایره $|z-z_0|=r_0$ تحلیلی است.

آنگاه :

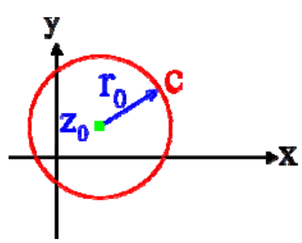
$f(z_0)$ (درون دایره) نیز کراندار است و کران بالای آن نمی تواند از کران f(z) روی دایره تجاوز کند.

اثبات :

تابع f(z) روی و درون دایره $|z-z_0|=r_0$ تحلیلی است. پس می توان نوشت :

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

تابع پیوسته و کراندار است. پس : $|f(z)|\le M$



$$|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_c\frac{|f(z)|}{|z-z_0|}|dz|$$

$$|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_c\frac{M}{r_0}|dz|$$

$$|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{r_0}(2\pi r_0)=M \rightarrow |f(z_0)|\le M$$

ثابت می کنند که $|f(z)|$ به M هم نمی رسد و همواره کوچکتر از آن است.

نامساویهای کوشی

تابع $f(z)$ روی و درون دایره $|z-z_0|=r_0$ تحلیلی است.

پس می توان نوشت :

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n! \times M}{r_0^n}$$

M کران بالای $f(z)$ روی دایره c است.

اثبات :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi} \oint_c \frac{|f(z)||dz|}{|z-z_0|^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi} \oint_c \frac{M|dz|}{r_0^{n+1}}$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{2\pi r_0^{n+1}} \oint_c |dz| = \frac{n!M}{2\pi r_0^{n+1}}(2\pi r_0)$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{r_0^n}$$

قضیه لیوویل Liouville :

اگر تابع کراندار $f(z)$ در تمام صفحه z تحلیلی باشد (تام باشد) ، آنگاه این تابع ثابت خواهد بود.

اثبات :

چون تابع $f(z)$ در تمام صفحه z تحلیلی است ، می توان در قضیه ماکزیمم مدول r_0 را آنقدر بزرگ (بینهایت) در نظر بگیریم ؛ بطوریکه :

$$|f'(z_0)| \le \frac{M}{r_0} = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f(z_0) = cte$$

چون تابع تام است ، نقطه z_0 هر نقطه در صفحه z خواهد بود ، لذا می توان نوشت : $f(z) = cte$

نتیجه مهم : هر تابعی (به غیر از تابع ثابت) که در تمام صفحه z تحلیلی باشد ، در تمام صفحه کراندار نخواهد بود.

ولی در فاصله محدود کراندار است. پس نقطه منفرد این تابع ∞ است.

قضیه دالامبر (قضیه اصلی جبر)

هر کثیرالجمله درجه n ام بر حسب z لااقل یک صفر دارد.

اثبات : $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$

(با استفاده از برهان خلف)

اگر چندجمله ای دارای صفری نباشد ، $\frac{1}{p(z)}$ تحلیلی و کراندار است . زیرا $p(z)$ هیچگاه صفر نمی شود.

پس بنا بر قضیه لیوویل این تابع ثابت است.
ولی این خلاف فرض است.

پس $p(z)$ حتما یک ریشه دارد.

می توان چندجمله ای را بر $z-z_1$ (z_1 ریشه اول $p(z)$) تقسیم نموده آنگاه کثیرالجمله درجه $n-1$ ام حاصل نیز مشابه آنچه گفته شد ، یک ریشه دارد و .....

پس هر کثیرالجمله درجه n ام ، n ریشه دارد.