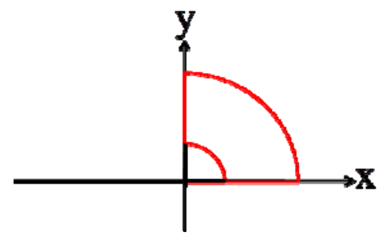
محاسبه انتگرالهای مختلط و حقیقی

مثال ۱ :

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx \quad , \quad \int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$$

مسیر Γ را ربع دایره در نظر می گیریم.



با توجه به انتگرالهای داده شده، انتگرال ذیل را محاسبه می‌کنیم :

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx$$

$f(z)=\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}$ دارای یک قطب ساده در مبدأ است.

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=\lim_{z\to\infty}\sqrt{z}e^{iz}=0$$

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\sqrt{z}e^{iz}=0$$

$$\oint_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}dz=\int_0^{\infty}\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{\sqrt{i}}\int_{\infty}^{0}\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}idy-\frac{\pi}{2}(0)$$

$$0=\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx+i\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx-\sqrt{i}\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx+i\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{\infty}y^{-0.5}e^{-y}dy$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx+i\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad , \quad \int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

انتگرالهای فوق با توجه به تابع گاما که در ذیل تعریف شده، بدست آمده است.

$$\mathbf{\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{n-1}dx}$$ **تابع گاما**

$$\Gamma(0.5)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{-0.5}dx$$

$$\sqrt{x}=u\rightarrow \quad \Gamma(0.5)=\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$