معادلات و مشتقات جزئی

معادلات شبه خطی

سؤال : این معادلات چگونه حاصل می‌شوند؟

دو تابع مشخص از x , y , z مفروضند :

$$u(x,y,z)\ ,\ v(x,y,z)$$

بین u , v یک رابطه دلخواه می توان بدست آورد :

$$f(u,v)=0$$

از تابع فوق نسبت به متغیرهای x و y مشتق می‌گیریم :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p\right)+\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}p\right)=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}q\right)+\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}q\right)=0\end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ نمی توانند با هم صفر شوند. زیرا f نمی تواند تابعی از u , v نباشد

دستگاه اخیر یک دستگاه خطی همگن است. بطوریکه برای اینکه جواب غیر صفر داشته باشد ، بایستی دترمینان ضرایب معادله صفر باشد.

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p & \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}p\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}q & \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}q\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p & \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}q\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}p & \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}q\end{vmatrix}=0$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}_{R}+\underbrace{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}}_{-Q}q+\underbrace{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}_{-P}p+\cancelto{0}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}}pq=0$$

$$\boxed{Pp+Qq=R}$$

$$\boxed{P=J\left(\frac{u,v}{y,z}\right)\ ,\ Q=J\left(\frac{u,v}{z,x}\right)\ ,\ R=J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)}$$

حل معادلات شبه خطی مرتبه اول

قبلا مشاهده شد که جواب این معادله بصورت $f(u,v)=0$ است.

دو رویه در نظر می گیریم :

$$\begin{cases}u(x,y,z)=c_1\\ v(x,y,z)=c_2\end{cases}$$

تقاطع این دو رویه یک خم است که جواب معادله بوده و جواب دستگاه فوق نیز می باشد.

این خم را <u>خم مشخصه</u> معادله با مشتقات جزئی گویند.

چون c_1 , c_2 دلخواه هستند ، طایفه ای از خمها را داریم.

فرض کنید معادلات پارامتری این خم را داشته باشیم :

$$x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)$$

از معادلات دستگاه اخیر نسبت به t مشتق می گیریم :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}=0\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}\end{cases}$$

از دو معادله اخیر $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ را بر حسب $\dfrac{dz}{dt}$ تعیین می کنیم :

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\frac{dx}{dt}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}\frac{dz}{dt}\Rightarrow Rdx=Pdz$$

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\frac{dy}{dt}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}\frac{dz}{dt}\Rightarrow Rdy=Qdz$$

$$\boxed{\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}}$$

معادلات همگن درجه دوم (معادله اولر)

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

در این معادله همه مشتقات درجه ۲ است ، لذا آن را همگن نامیده اند.

c , b , a اعداد ثابت هستند.

برای حل این معادله تعویض متغیر زیر بکار می رود :

$$u=y+m_1x\ \ ,\ \ v=y+m_2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=m_1\frac{\partial z}{\partial u}+m_2\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[m_1\frac{\partial z}{\partial u}+m_2\frac{\partial z}{\partial v}\right]\ \ ,\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=m_1^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2m_1m_2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+m_2^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=m_1\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(m_1+m_2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+m_2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left[am_1^2+bm_1+c\right]+$$

$$\left[2am_1m_2+b(m_1+m_2)+2c\right]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$+\left[am_2^2+bm_2+c\right]\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

m_2 , m_1 را طوری انتخاب می شود که معادله ساده تر شود.

$$am^2+bm+c=0$$ **معادله مفسر (مشخصه)**

سه حالت وجود دارد :

۱- معادله فوق دارای دو ریشه حقیقی است. $m=m_1\,,m_2$

در این حالت معادله از رده معادلات هیپربولیک است.

با فرض اینکه ضریب $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ مخالف صفر باشد :

$$2am_1m_2+b(m_1+m_2)+2c=\frac{4ac-b^2}{a}\neq 0$$

پس :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0\rightarrow\frac{\partial z}{\partial v}=\phi(v)\Rightarrow\ z=f_1(u)+f_2(v)$$

$$\boxed{z=f_1(y+m_1x)+f_2(y+m_2x)}$$

۲- معادله مفسر دارای ریشه حقیقی مکرر است.

در این حالت معادله از رده معادلات **سهمیگون(پارابولیک)** است.

$$m_1=\frac{-b}{2a}$$

$m_2\neq m_1$ انتخاب می شود. زیرا :

$$2am_1m_2+b(m_1+m_2)+2c=0\quad\forall m_2$$

در این صورت معادله اولر بصورت زیر ساده می شود :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0\rightarrow\frac{\partial z}{\partial v}=\phi(u)\rightarrow\ z=v\phi(u)+\psi(u)$$

$$z=(y+m_2x)\phi(y+m_1x)+\psi(y+m_1x)$$

می‌توان با تغییراتی جواب بدست آمده را فقط برحسب m_1 نوشت :

$$z=(y+m_1x)\phi(y+m_1x)+(m_2-m_1)x\phi(y+m_1x)$$
$$+\psi(y+m_1x)$$

$$\boxed{z=f_1(y+m_1x)+xf_2(y+m_1x)}$$

۳- معادله مفسر دارای ریشه موهومی و مزدوج یکدیگر است.

در این حالت معادله از رده معادلات بیضوی است.

$$m=\alpha\pm\beta i$$

می‌توان مشابه حالت ۱ عمل نمود و بدست آورد :

$$z=\phi_1(y+\alpha x+i\beta x)+\phi_2(y+\alpha x-i\beta x)$$

می توان جواب فوق را بصورت زیر نیز نوشت :

$$z=f_1(y+\alpha x+i\beta x)+f_1(y+\alpha x-i\beta x)$$
$$+if_2(y+\alpha x+i\beta x)-if_2(y+\alpha x-i\beta x)$$

در فرم فوق $z=\bar{z}$ است و جواب حقیقی می باشد.

به عبارت دیگر ، توابع ϕ_1 , ϕ_2 مختلط و توابع f_1 , f_2 حقیقی هستند.