پاسخ تمرین سری اول

۱- مسئله ۸ از فصل ۱

$$(e,\frac{۱۹}{۷}) \to Q-Q_{۱} = e-\frac{۱۹}{۷} \simeq ۰/۰۰۴ \ , \ \frac{Q-Q_{۱}}{Q} \simeq ۰/۰۰۱۴۷ \ , \ \frac{Q-Q_{۱}}{Q}\times ۱۰۰ \simeq ۰/۱۴۷\%$$

$$(\frac{۵}{۶}, ۰/۸۳۳۳) \to Q-Q_{۱} = \frac{۵}{۶} - ۰/۸۳۳۳ \simeq ۳/۳\times ۱۰^{-۵} \ , \ \frac{Q-Q_{۱}}{Q} = ۴\times ۱۰^{-۵} \ , \ \frac{Q-Q_{۱}}{Q}\times ۱۰۰ = ۰/۰۰۴\%$$

۲- مسئله ۲۰ از فصل ۱

$$I_n = \int_۰^۱ x^n e^{x-۱}dx = x^n e^{x-۱}\Big|_۰^۱ - \int_۰^۱ n x^{n-۱} e^{x-۱}dx = ۱ - n\int_۰^۱ x^{n-۱}e^{x-۱}dx \to I_n = ۱ - nI_{n-۱}$$

تابع نمایی در زیر انتگرال در بازه داده شده کوچکتر از یک بوده و با افزایش n ، تابع x^n در بازه داده شده کوچکتر می شود. لذا حاصل انتگرال کوچک خواهد شد. اگر فرض کنیم با افزایش n ، حاصل انتگرال به عدد ثابت k میل می کند، خواهیم داشت :

$$I_n = ۱ - nI_{n-۱} \to k = ۱ - nk \to k(۱+n) = ۱ \to k = \frac{۱}{n+۱} \to k = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n+۱} = ۰$$

$$I_۰ = \int_۰^۱ e^{x-۱}dx = e^{x-۱}\Big|_۰^۱ = ۱ - e^{-۱} \simeq ۰/۶۳۲$$

فرض کردیم به عنوان مثال ، محاسبات میانی را با سه رقم اعشار انجام دهیم.

$$I_n = ۱ - nI_{n-۱} \to I_۱ = ۱ - I_۰ = ۰/۳۶۸ \to I_۲ = ۱ - ۲I_۱ = ۰/۲۶۴ \to I_۳ = ۱ - ۳I_۲ = ۰/۲۰۸ \to I_۴ = ۱ - ۴I_۳ = ۰/۱۶۸$$
$$\to I_۵ = ۱ - ۵I_۴ = ۰/۱۶۰ \to I_۶ = ۱ - ۶I_۵ = ۰/۰۴۰ \to I_۷ = ۱ - ۷I_۶ = ۰/۷۲$$

پس الگوریتم ناپایدار است.

برای اینکه الگوریتم از دقت سه رقم با معنی که در اینجا یعنی سه رقم اعشار در محاسبه $I_۹$ برخوردار باشد، بایستی محاسبات با دقت بالاتر بکار رود.

خطای مطلق در مرحله n ام با توجه به خطای خاصلضرب، برابر $n\Delta I_{n-۱}$ است. برای اینکه دقت در محاسبه $I_۹$ سه رقم اعشار باشد، لذا حداکثرخطای مطلق در این مرحله برابر ۰/۰۰۰۵ است. پس حداکثر خطای محاسبه $I_۱$ برابر $\frac{۰/۰۰۰۵}{۸!} \simeq ۱/۲۴\times ۱۰^{-۸}$ خواهد بود.

بنابراین محاسبات میانی را با ۸ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$I_۰ = ۱ - e^{-۱} \simeq ۰/۶۳۲۱۲۰۵۶ \to I_۱ = ۱ - I_۰ = ۰/۳۶۷۸۷۹۴۴ \to I_۲ = ۱ - ۲I_۱ = ۰/۲۶۴۲۴۱۱۲ \to$$
$$I_۳ = ۱ - ۳I_۲ = ۰/۲۰۷۲۸۶۶۴ \to I_۴ = ۱ - ۴I_۳ = ۰/۱۷۰۸۹۳۴۴ \to I_۵ = ۱ - ۵I_۴ = ۰/۱۴۵۵۳۲۸ \to$$
$$I_۶ = ۱ - ۶I_۵ = ۰/۱۲۶۸۰۳۲ \to I_۷ = ۱ - ۷I_۶ = ۰/۱۱۲۳۷۷۶ \to I_۸ = ۱ - ۸I_۷ = ۰/۱۰۰۹۷۹۲ \to I_۹ = ۱ - ۹I_۸ = ۰/۰۹۱۱۸۷۲$$

مقدار $I_۹$ با دقت سه رقم اعشار برابر ۰/۰۹۱ است.

۳- مسئله ۱ از فصل ۲

$$f_۱(x) = ۵x - ۴\cos(x) \ , \ f_۱ \text{ is continous} \ , \ f_۱(۰) = -۴ \ , \ f_۱(\frac{\pi}{۴}) = ۵\frac{\pi}{۴} - ۲\sqrt{۲} = ۱/۰۹ > ۰ \to f_۱(۰)f_۱(\frac{\pi}{۴}) < ۰$$

پس طبق قضیه بولتزانو در بازه $[۰,\frac{\pi}{۴}]$ حداقل یک ریشه دارد.

$$f_۱(x) = ۵x - ۴\cos(x) \to f_۱'(x) = ۵ + ۴\sin(x) > ۰ \ : \ x \in [۰,\frac{\pi}{۴}]$$

لذا بر اساس قضیه دوم در بازه فوق حداکثر یک ریشه دارد. بنابراین فقط یک ریشه دارد.

$$f_{۲۹}(x)=x^{۳}-۵x-۶\ ,\ f_{۲۹}\text{ is continous}\ ,\ f_{۲۹}(۲)=-۸\ ,\ f_{۲۹}(۳)=۶>۰\rightarrow f_{۲۹}(۲)f_{۲۹}(۳)<۰$$

پس طبق قضیه بولتزانو در بازه $[۲,۳]$ حداقل یک ریشه دارد.

$$f_{۲۹}'(x)=۳x^{۲}-۵>۰\ :\ x\in[۲,۳]$$

لذا بر اساس قضیه دوم در بازه فوق حداکثر یک ریشه دارد. بنابراین فقط یک ریشه دارد.

برای آنکه محدوده بقیه ریشه ها را بدست آوریم از قضایای دیگر استفاده می کنیم. بنابر قضیه علائم دکارت داریم :

تعداد تغییر علامت تابع برابر ۱ است. پس حتما یک ریشه مثبت دارد که محدوده آن قبلا تعیین شد. ریشه صفر ندارد. زیرا مقدار ثابت صفر نیست. تعداد تغییر علامت تابع $f_{۲۹}(-x)=-x^{۳}+۵x-۶$ برابر ۲ است. لذا تعداد ریشه های منفب تابع اصلی ، ۲ یا صفر است.

بنابراین یک ریشه مثبت و دو ریشه مختلط و مزدوج یکدیگر دارد و یا یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی خواهد داشت.

بر اساس قضیه Rouche Bound داریم : $\dfrac{۶}{۶+\max(۱,۵)}\leq|x|\leq ۱+\dfrac{۱}{۱}\max(۵,۶)\rightarrow \dfrac{۶}{۱۱}\leq|x|\leq ۷$

۴- مسئله ۱ و تابع ۲۹ از فصل ۲

$$f(x)=x^{۳}-۵x-۶\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۵\rightarrow x_{n+۱}=x_n-\frac{x_n^{۳}-۵x_n-۶}{۳x_n^{۲}-۵}\rightarrow x_{n+۱}=\frac{۲x_n^{۳}+۶}{۳x_n^{۲}-۵}\ ,\ x_{۰}=۳\rightarrow$$

$$x_{۱}=۲/۷۲۷۲۷\rightarrow x_{۲}=۲/۶۸۹۷۸\rightarrow x_{۳}=۲/۶۸۹۱۰۰\rightarrow x_{۴}=۲/۶۸۹۱۰۰$$

محاسبان میانی باید ۵ رقم اعشار باشد.

دستور roots :

با اجرای دستورالعملهای ذیل :

```
>> a=[1 0 -5 -6];
>> roots(a)
```

نتیجه ذیل حاصل خواهد شد :

```
ans =

  2.6891 + 0.0000i
  -1.3445 + 0.6507i
  -1.3445 - 0.6507i
```

مقایسه این نتایج با ریشه حقیقی مسئله ۴ نشان از دقت گفته شده در مسئله ۴ دارد.