پاسخ تمرین سری سوم

۱- مسئله ۷۳ از فصل ۵

روش سیمسون مرکب :

$$I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+9}dx\xrightarrow{x=\frac{1}{z}}I=\int_1^{0}\frac{1}{z^{-2}+9}(-z^{-2})dz=\int_0^{1}\frac{1}{1+9z^2}dz\rightarrow I=\int_0^{1}\frac{1}{1+9x^2}dx\rightarrow f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{-18x}{(1+9x^2)^2}\rightarrow f''(x)=(-18)\frac{(1+9x^2)-2(18x)(x)}{(1+9x^2)^3}=(-18)\frac{1-27x^2}{(1+9x^2)^3}$$

$$\rightarrow f'''(x)=(-18)\frac{-54x(1+9x^2)-3(18x)(1-27x^2)}{(1+9x^2)^4}=1944\frac{x-9x^3}{(1+9x^2)^4}\rightarrow$$

$$f^{(4)}(x)=1944\frac{(1-27x^2)(1+9x^2)-4(18x)(x-9x^3)}{(1+9x^2)^5}=1944\frac{1-90x^2+405x^4}{(1+9x^2)^5}\rightarrow M_4=1944$$

$$\Delta x=\frac{1-0}{4}=0.25\rightarrow |E|\le\frac{(0.25)^5}{180}4(1944)\simeq 0.04$$

$$A=\frac{\Delta x}{3}[f(0)+4f(\frac{1}{4})+2f(\frac{2}{4})+4f(\frac{3}{4})+f(1)]=\frac{1}{12}[1+2.56+0.62+0.66+0.1]=0.41$$

گوس- لژاندر سه نقطه ای :

$$P_3(x)=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3]=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}[x(x^2-1)^2]=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}[x^5-2x^3+x]=\frac{1}{8}\frac{d^1}{dx^1}[5x^4-6x^2+1]$$

$$P_3(x)=\frac{1}{8}(20x^3-12x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)=0\rightarrow x_1=-\sqrt{0.6}\ ,\ x_2=0\ ,\ x_3=\sqrt{0.6}$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2]=\frac{1}{2}\frac{d^1}{dx^1}[x^3-x]=\frac{1}{2}(3x^2-1)\ ,\ \omega_1=\omega_3=\frac{2(1-x_1^2)}{3^2[P_2(x_1)]^2}=\frac{2(0.4)}{9(0.4)^2}=\frac{5}{9}\ ,$$

$$\omega_2=\frac{2}{9(0.5)^2}=\frac{8}{9}\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}f(t)dt\simeq\frac{5}{9}f(-\sqrt{0.6})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\sqrt{0.6})$$

$$I=\int_0^1\frac{1}{1+9x^2}dx\xrightarrow{x=\frac{t+1}{2}}I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+9(\frac{t+1}{2})^2}dt\rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+9(\frac{t+1}{2})^2}$$

$$I\simeq\frac{1}{2}[\frac{5}{9}\frac{1}{1+9(\frac{-\sqrt{0.6}+1}{2})^2}+\frac{8}{9}\frac{1}{1+9(\frac{0+1}{2})^2}+\frac{5}{9}\frac{1}{1+9(\frac{\sqrt{0.6}+1}{2})^2}]=0.42$$

$$E=\frac{f^{(6)}(\varepsilon)}{(6)!}\frac{2^7(3!)^4}{(7)!(6)!}=\frac{1}{15750}f^{(6)}(\varepsilon)$$

$$f^{(6)}=2099520\frac{5103t^6+30618t^5+65205t^4+56700t^3+11529t^2-8694t-3277}{(9t^2+18t+13)^7}\rightarrow M_6=4100.5$$

$$|E|\le 0.26$$

۲- الف- $\int_{-1}^{1}f(x)dx=af(-1)+bf(1)+cf'(-1)+df'(1)\ ,\ f(x)=1\rightarrow 2=a+b\ \boxed{1}$

$$f(x)=x \to 0=-a+b+c+d\ \boxed{2},\ f(x)=x^2 \to \frac{2}{3}=a+b-2c+2d\ \boxed{3},$$

$$f(x)=x^3 \to 0=-a+b+3c+3d\ \boxed{4}$$

$$\boxed{3} \xrightarrow{\boxed{1}} -c+d=\frac{-2}{3}\ ,\ \boxed{4}-\boxed{2} \to c+d=0 \Rightarrow c=\frac{1}{3}, d=\frac{-1}{3}\ ,\ \boxed{2} \to -a+b=0 \xrightarrow{\boxed{1}} a=b=1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-1)+f(1)+\frac{1}{3}f'(-1)-\frac{1}{3}f'(1)$$

$$f(x)=x^4 \to I=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{2}{5}\ ,\ I_3=f(-1)+f(1)+\frac{1}{3}f'(-1)-\frac{1}{3}f'(1)=1+1-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$$

$$I-I_3=Cf^{(4)}(\varepsilon) \to \frac{16}{15}=24C \to C=\frac{2}{45} \Rightarrow E=\frac{2}{45}f^{(4)}(\varepsilon)$$

ب- $I=\int_{-1}^{3}\sin(x^2)dx \xrightarrow{x=2t+1} I=2\int_{-1}^{1}\sin((2t+1)^2)dt \to f(t)=2\sin((2t+1)^2) \to f'(t)=(8t+4)\cos((2t+1)^2)$

$$f^{(4)}(t)=2(8t+4)^4\sin((2t+1)^2)-64(8t+4)^2\cos((2t+1)^2)-384\sin((2t+1)^2)$$
$$-2(8t+4)(128t+64)\cos((2t+1)^2)$$

$$\max f^{(4)}(t)\Big|_{-1}^{1}=37250 \to |E|\le 1655/5$$

چون حداکثر خطای مطلق بسیار بزرگ است، نتیجه حتی از دقت یک رقم اعشار هم برخوردار نخواهد بود.

$$I=2\int_{-1}^{1}\sin((2t+1)^2)dt=2[\sin((-2+1)^2)+\sin((2+1)^2)+\frac{1}{3}(-8+4)\cos((-2+1)^2)-\frac{1}{3}(8+4)\cos((2+1)^2)$$

$$I=2[0/84+0/41-0/72+3/64]=8/34$$

-3

$$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=a \\ x_1+2x_2+3x_3=6 \\ x_1+3x_2+4x_3=6 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & 3-a & 6-a \\ 0 & 2 & 4-a & 6-a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2a-3 & 2a-6 \\ 0 & 1 & 3-a & 6-a \\ 0 & 0 & -2+a & -6+a \end{bmatrix}$$

$$\text{if } -2+a\neq 0 \text{ then} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2a-3 & 2a-6 \\ 0 & 1 & 3-a & 6-a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6+a}{-2+a} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-6+(3-2a)\frac{-6+a}{-2+a} \\ 0 & 1 & 0 & 6-a+(a-3)\frac{-6+a}{-2+a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6+a}{-2+a} \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1=\frac{5a-6}{a-2} \\ x_2=\frac{-a+6}{a-2} \\ x_3=\frac{-6+a}{a-2} \end{cases}$$

$$\text{if } -2+a=0 \text{ then} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to r(A)=2\neq r(Ab)=3 \Rightarrow \text{no answer}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=6 \\ x_1+3x_2+4x_3=6 \end{cases} \to A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} 0/5 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} \to C=C^{-1}=I,$$ -4

$$r^{(۰)} = b - Ax^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \\ ۶ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ -۴ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱/۵ \\ ۱/۵ \end{bmatrix}, w = C^{-۱} r^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱/۵ \\ ۱/۵ \end{bmatrix}, v^{(۱)} = C^{-t} w = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱/۵ \\ ۱/۵ \end{bmatrix}, \alpha = \langle w, w \rangle = ۴/۷۵$$

$$k = ۱ : \ u = Av^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱/۵ \\ ۱/۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۵ \\ ۸ \\ ۱۱ \end{bmatrix}, t_۱ = \frac{\alpha}{\langle v^{(۱)}, u \rangle} = \frac{۴/۷۵}{۳۰/۲۵} = ۰/۱۵۷,$$

$$x^{(۱)} = x^{(۰)} + t_۱ v^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ -۴ \\ ۴ \end{bmatrix} + ۰/۱۵۷ \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱/۵ \\ ۱/۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵۷۹ \\ -۳/۷۶۵ \\ ۴/۲۳۶ \end{bmatrix}, r^{(۱)} = r^{(۰)} - t_۱ u = \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱/۵ \\ ۱/۵ \end{bmatrix} - ۰/۱۵۷ \begin{bmatrix} ۳/۵ \\ ۸ \\ ۱۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۰۵۰ \\ ۰/۲۴۴ \\ -۰/۲۲۷ \end{bmatrix},$$

$$w = C^{-۱} r^{(۱)} = \begin{bmatrix} -۰/۰۵۰ \\ ۰/۲۴۴ \\ -۰/۲۲۷ \end{bmatrix}, \beta = \langle w, w \rangle = ۰/۱۱۴, s_۱ = \frac{\beta}{\alpha} = ۰/۰۲۴$$

$$v^{(۲)} = C^{-t} w + s_۱ v^{(۱)} = \begin{bmatrix} -۰/۰۵۰ \\ ۰/۲۴۴ \\ -۰/۲۲۷ \end{bmatrix} + ۰/۰۲۴ \begin{bmatrix} ۰/۵ \\ ۱/۵ \\ ۱/۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۰۳۸ \\ ۰/۲۸۰ \\ -۰/۱۹۱ \end{bmatrix}$$

$$k = ۱ : \ a = \beta = ۰/۱۱۴, u = Av^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۰۳۸ \\ ۰/۲۸۰ \\ -۰/۱۹۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۰۵۱ \\ -۰/۰۵۱ \\ ۰/۰۳۸ \end{bmatrix}, t_۲ = \frac{\alpha}{\langle v^{(۲)}, u \rangle} = \frac{۰/۱۱۴}{-۰/۰۲۴} = -۴/۷۵۰$$

$$, x^{(۲)} = x^{(۱)} + t_۲ v^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰/۵۷۹ \\ -۳/۷۶۵ \\ ۴/۲۳۶ \end{bmatrix} - ۴/۷۵۰ \begin{bmatrix} -۰/۰۵۰ \\ ۰/۲۴۴ \\ -۰/۲۲۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۷۶۰ \\ -۵/۰۹۴ \\ ۵/۱۴۳ \end{bmatrix}$$

با مقایسه نتیجه مرحله ۱ و ۲، در مورد هیچکدام از متغیرها هنوز به دقتی نرسیدیم.

دستور integral :

مسئله ۱ :

با اجرای دستورالعملهای ذیل :

```
f=@(x)1./(x.^2+9)
integral(f,1,inf)
```

جواب برابر است با : ۰/۴۱۶۳ در مقایسه با نتایج مسئله اول ، می توان دریافت که روش سیمسون از دقت ۱ رقم اعشار هم برخوردار است ولی روش گوس لژاندر سه نقطه ای از دقت ۲ رقم اعشار برخوردار می باشد.

مسئله ۲ :

با اجرای دستورالعملهای ذیل :

```
f=@(x)sin(x.^2)
integral(f,-1,3)
```

جواب برابر است با ۱/۰۸۳۸ در مقایسه با نتیجه مسئله دوم ، نتیجه سوال ۲ ، از دقتی برخوردار نیست.