پاسخ کوییز دوم

۱- در این روش خطا متناسب با $h^{۳}$ بوده و بطور میانگین برابر $۳h^{۳} = ۰/۰۰۳$ بوده و لذا دقت آن دو رقم اعشار است. پس محاسبات میانی را با ۳ رقم اعشار انجام می دهیم.

$$y' = e^{-xy} \;,\; [۰, ۰/۲] \;,\; y(۰) = y_{۰} = ۱ \;,\; h = ۰/۱$$

$$\begin{cases} y_{۰/۵} = y_{۰} + \frac{۰/۱}{۲} e^{-۰} = ۱/۰۵۰ \\ y_{۱} = y_{۰} + ۰/۱ e^{-(۰/۰۵)(۱/۰۵۰)} = ۱/۰۹۵ = y(۰/۱) \end{cases} \;,\; \begin{cases} y_{۱/۵} = y_{۱} + \frac{۰/۱}{۲} e^{-(۰/۱)(۱/۰۹۵)} = ۱/۱۴۰ \\ y_{۲} = y_{۱} + ۰/۱ e^{-(۰/۱۵)(۱/۱۴۰)} = ۱/۱۷۹ = y(۰/۲) \end{cases}$$

۲-

$$L_{۲}(x) = \sum_{k=۰}^{۲} C_k^{۲} \frac{(-۱)^k}{k!} x^k = ۱ - ۲x + \frac{۱}{۲} x^{۲} \xrightarrow{L_{۲}(x)=۰} x^{۲} - ۴x + ۲ = ۰ \to x_{۱} = ۲ + \sqrt{۲} \,,\, x_{۲} = ۲ - \sqrt{۲}$$

$$L_{۲}'(x) = -۲ + x \;,\; \omega_{۱} = \frac{۱}{(۲+\sqrt{۲})[L_n'(۲+\sqrt{۲})]^{۲}} = \frac{۱}{(۲+\sqrt{۲})[\sqrt{۲}]^{۲}} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\omega_{۲} = \frac{۱}{(۲-\sqrt{۲})[L_n'(۲-\sqrt{۲})]^{۲}} = \frac{۱}{(۲-\sqrt{۲})[-\sqrt{۲}]^{۲}} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \quad , \quad E = (۲!)^{۲} \frac{f^{(۴)}(\varepsilon)}{(۴)!} = \frac{۱}{۶} f^{(۴)}(\varepsilon)$$

$$\int_{۰}^{\infty} \sin^{۲}(x) e^{-x} dx \to f(x) = \sin^{۲}(x) \to f'(x) = ۲\sin(x)\cos(x) = \sin(۲x) \to f''(x) = ۲\cos(۲x)$$

$$f'''(x) = -۴\sin(۲x) \to f^{(۴)}(x) = -۸\cos(۲x) \to \max f^{(۴)}(x)\Big|_{x\in[۰,\infty]} = ۸ \to |E| \le \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

$$\int_{۰}^{\infty} f(x) e^{-x} dx \simeq \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} f(۲+\sqrt{۲}) + \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} f(۲-\sqrt{۲})$$

بر اساس ماکزیمم خطای مطلق، نتیجه از دقت یک رقم اعشار نیز برخوردار نیست. لذا محاسبات میانی را با دقت یک رقم اعشار انجام می دهیم.

$$\int_{۰}^{\infty} f(x) e^{-x} dx \simeq \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} f(۲+\sqrt{۲}) + \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} f(۲-\sqrt{۲}) \simeq ۰ + ۰/۳ = ۰/۳$$