دانشکده مهندسی برق گروه کنترل تاریخ :۹۳/۸/۲۶ وقت : ۲ ساعت	بنام آنکه جان را فکرت آموخت **روشهای محاسبات عددی** میان ترم	۱۳۰۷ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مدرس : رسول دلیرروی فرد

فقط به شش سؤال پاسخ دهید.

۱- در هر یک از زوج اعداد زیر ، اولین و دومین عدد به ترتیب ، عدد تقریبی و حد بالای خطای درصد آن هستند. با و بدون قضیه تعداد ارقام با معنی صحیح آن را تعیین کنید.

$$\left(\frac{355}{113}, 8/5\times10^{-6}\right) \quad , \quad \left(3228/14, 1/5\times10^{-4}\right)$$

۲- در یک تحقیق علمی به الگوریتم بازگشتی $a_n = \frac{1}{2n-1} - 2a_{n-1}$ دست یافته‌ایم. با فرض اینکه بدانیم $a_n \geq 0$:

الف- اگر $a_0 = 0/302$ باشد، نشان دهید که این الگوریتم ناپایدار است. محاسبات خود را فقط با سه رقم اعشار انجام دهید.

ب- اگر $a_0 = 0/3023$ باشد، مقدار a_4 را تقریب بزنید. محاسبات خود را فقط با ۴ رقم اعشار انجام دهید.

۳- فقط بر اساس قضایای گفته شده، تعداد ، محدوده و نوع ریشه‌های معادله $12x^4 + 47x^3 + 50x^2 - 29x - 30 = 0$ را تعیین کنید. آیا این معادله ریشه‌های کسری دارد؟ در صورت جواب مثبت مقدار آن را بر اساس قضیه مربوط به آن تعیین کنید.

۴- ریشه‌های معادله $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$ بصورت تقریبی با روش Graffe تعیین کنید. فقط سه مرحله را بکار ببرید.

۵- با استفاده از درونیابی اسپلاین مربعی (quadratic) ، مقدار $f(3)$ را برای جدول داده‌های ذیل تقریب بزنید. در تعیین تابع درونیاب، فرض کنید که مشتق دوم تابع درونیاب در نقطه اول $(x = 0)$ برابر $-\frac{\pi^2}{36}$ باشد.

x	۰	۲	۴
f(x)	۱	۰/۵	-۰/۵

۶- بر اساس ارتباط مشتق با اپراتورهای تفاضل مستقیم، رابطه‌ای را بدست آورید که مشتق دوم یک تابع را با خطای از مرتبه ۲ از h (نرخ رشد x) در نقاط متساوی‌الفاصله تقریب بزند. این رابطه را بر حسب مقادیر تابع در نقاط مختلف نمایش دهید.

۷- با استفاده از روش بسط تیلور مرتبه ۲ ، معادله دیفرانسیل $y' = x^2 + y \;,\; y(0) = 1$ را حل نموده و فقط $y(0/1)$ را با طول گام ۰/۱ تعیین کنید.

۸- با استفاده از روش رانگ- کوتا مرتبه ۵ ، Lawson، معادله دیفرانسیل $y' = x^2 + y \;,\; y(0) = 1$ را حل نموده و فقط $y(0/1)$ را با طول گام ۰/۱ تعیین کنید. محاسبات خود را حداقل با ۷ رقم اعشار انجام دهید.

۹- می‌دانیم محیط بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ از رابطه مقابل بدست می‌آید : $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\,dt$

مقدار تقریبی محیط بیضی را به ازای $a = 2$ و $b = 1$ و با روش سیمسون مرکب با $n = 4$ اعشار تعیین کنید. محاسبات خود را حداقل با ۴ رقم اعشار انجام دهید.

۱۰- مقدار انتگرال دوگانه $I = \int_{-2}^{0}\int_{1}^{3}(xy)\,dy\,dx$ را با استفاده از روش انتگرال‌گیری گوس- لژاندر یک نقطه‌ای تقریب بزنید و با تعیین مقدار واقعی انتگرال، مقدار خطا را توجیه کنید.

موفق باشید

دانشکده مهندسی برق
گروه کنترل

تاریخ: ۹۳/۸/۲۶
وقت: ۲ ساعت

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

روشهای محاسبات عددی

میان ترم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ۱۳۰۷

مدرس: رسول دلیرروی فرد

قضیه Rouche Bound: برای $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ داریم:

حدبالای اندازه ریشه‌ها: $1 + \dfrac{1}{|a_0|} \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$

حد پائین اندازه ریشه‌ها: $\dfrac{|a_n|}{|a_n| + \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}}$

رابطه مشتق با اپراتور تفاضل مستقیم: $\Delta = hD + \dfrac{h^2}{2!} D^2 + \dfrac{h^3}{3!} D^3 + \dots \quad , \quad D = \dfrac{1}{h}\left(\Delta - \dfrac{\Delta^2}{2} + \dfrac{\Delta^3}{3} - + \dots\right)$

روش رانگ- کوتا مرتبه ۵، Lawson:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \ , \ k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1) \ , \ k_3 = hf(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1 + \frac{1}{16}k_2) \\ k_4 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_3) \ , \ k_5 = hf(x_i + \frac{3}{4}h, y_i - \frac{3}{16}k_2 + \frac{6}{16}k_3 + \frac{9}{16}k_4) \\ k_6 = hf(x_i + h, y_i + \frac{1}{7}k_1 + \frac{4}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{7}{90}k_1 + \frac{32}{90}k_3 + \frac{12}{90}k_4 + \frac{32}{90}k_5 + \frac{7}{90}k_6 \end{cases}$$

روش انتگرال‌گیری سیمسون مرکب: $I = \dfrac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

روش انتگرال‌گیری گوس- لژاندر یک نقطه‌ای: $\int_{-1}^{1} f(t)dx \simeq 2f(0)$