دانشکده مهندسی برق گروه کنترل تاریخ: ۹۳/۱۰/۱۳ وقت : ۲/۵ ساعت	بنام آنکه جان را فکرت آموخت **روشهای محاسبات عددی** پایان ترم	۱۳۰۷ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مدرس : رسول دلیرروی فرد

<u>فقط به شش سؤال پاسخ دهید.</u>

۱- اگر ماتریس ضرایب معادلات یک دستگاه بصورت مقابل باشد، آیا این معادلات بدوضع هستند؟چرا؟ یک استدلال کافی است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲- با استفاده از روش SOR و $\omega=\frac{۴}{۳}$ و نقطه شروع $(۰,۰,۰)$، دستگاه معادلات زیر را <u>با دقت ۱ رقم اعشار</u>، حل کنید.

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=۲ \\ x_۱+۲x_۲+x_۳=۴ \\ x_۲+۲x_۳=۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۱=۲-x_۲ \\ x_۲=۲-۰/۵x_۱-۰/۵x_۳ \\ x_۳=۱/۵-۰/۵x_۲ \end{cases}$$

فرم روش گوس- سیدل این مسئله

۳- عدد شرطی ماتریس مسئله ۱ را یکبار بر اساس نرم ۱ و بار دیگر بر اساس نرم بینهایت بدست آورید.

٤- با استفاده از روش جردن، معادله مشخصه ماتریس مسئله ۱ را بیابید.

۵- برای حل دستگاه معادلات غیر خطی $\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۰/۲۵ \\ ۴x+۳y=۱۲/۵ \end{cases}$ **، آنها را به فرم** $\begin{cases} y=\sqrt{۱۰/۲۵-x^۲} \\ x=-۰/۷۵y+۳/۱۲۵ \end{cases}$ **تبدیل می‌کنیم.**

اولا چرا با استفاده از روش تکرار ، فرم جدید با نقطه شروع $(۱,۳)$، همگرا است؟

ثانیا مقدار ریشه معادلات را <u>با دقت ۲ رقم اعشار</u> تعیین کنید.

٦- دستگاه معادلات مقابل را با روش Halley با $\alpha=۰$ (روش چبی شف)، و با نقطه شروع $(۱,۳)$، حل کنید. <u>یک مرحله کافی است.</u>

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۰/۲۵ \\ ۴x+۳y=۱۲/۵ \end{cases}$$

۷- داده‌های جدول ذیل را برای $y=\sqrt[۳]{ax+b}$ برازش حداقل مربعات نموده (با خطی سازی) و <u>مجموع مربعات خطا</u> را تعیین کنید.

x	۱	۹	۷۳
y	۲	٤	۸

۸- سه چندجمله‌ای عمود بر هم اولیه $(\phi_۰,\phi_۱,\phi_۲)$ را با وزن $w(x)=x^۲$، در فاصله $[-۱,۱]$ بدست آورید. سپس روش حداقل مربعات را برای تقریب تابع $f(x)=x^۳$ در همین فاصله نسبت به مجموعه توابع عمود بر هم بدست آمده و وزن داده شده، بکار ببرید و <u>مجموع مربعات خطا</u> را تعیین کنید.

۹- دوگان مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را به ساده‌ترین فرم بنویسید. <u>حل مسئله و دوگان آن لازم نیست.</u>

$$\max\ f=۵x_۲+x_۳+۴x_۴ \quad : \quad \begin{cases} -x_۱+۵x_۲+۲x_۳+۵x_۴\le ۵ \\ ۳x_۲+x_۴=۲ \\ -x_۱+x_۳+۲x_۴=۱ \\ \forall j\ :\ x_j\ge ۰ \end{cases}$$

۱۰- می‌خواهیم با یک کاغذ با مساحت ثابت برابر π، یک مخروط قائم با قاعده بسازیم، بطوریکه ماکزیمم حجم را داشته باشد. شعاع قاعده و ارتفاع مخروط را تعیین کنید. از <u>روش ضرایب لاگرانژ</u> استفاده نمائید.

موفق باشید

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

روشهای محاسبات عددی

پایان ترم

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس : رسول دلیرروی فرد

دانشکده مهندسی برق
گروه کنترل

تاریخ: ۹۳/۱۰/۱۳
وقت : ۲/۵ ساعت

فرمول روش SOR:

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

نرم ۱ و بینهایت یک ماتریس :

$$\|A\|_{۱} = \max_j \sum_{i=۱}^{m} |a_{ij}| \quad , \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|$$

عدد شرطی : $c(A) = \|A\|\,\|A^{-۱}\|$

فرمول روش جردن :

$$M_{n-۱}^{-۱}AM_{n-۱} = A_{۱} \;,\; M_{n-۲}^{-۱}A_{۱}M_{n-۲} = A_{۲} \;,\; \ldots \;,\; M_{۱}^{-۱}A_{n-۲}M_{۱} = A_{n-۱}$$

روش Halley با $\alpha = ۰$ **(روش چبی شف)** :

$$x^{(k+۱)} = x^{(k)} - \left\{I + \tfrac{۱}{۲}L_F(x^{(k)})\right\}(F'^{(k)})^{-۱}F^{(k)} \quad , \quad k = ۰,۱,\ldots$$

$$L_F(x) = (F'(x))^{-۱}F''(x)(F'(x))^{-۱}F(x)$$

$$[F''(x)]_{ijk} = \frac{\partial^{۲} f_i(x)}{\partial x_k \partial x_j}$$

روابط تولید چندجمله‌ایهای عمود بر هم :

$$\phi_{۰}(x) = ۱ \;,\; \phi_{۱}(x) = x - B_{۱} \;:\; B_{۱} = \frac{\int_a^b x w(x)\phi_{۰}^{۲}(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_{۰}^{۲}(x)dx} \;,\; \phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-۱}(x) - C_k\phi_{k-۲}(x)$$

$$B_k = \frac{\int_a^b x w(x)\phi_{k-۱}^{۲}(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_{k-۱}^{۲}(x)dx} \quad , \quad C_k = \frac{\int_a^b x w(x)\phi_{k-۱}(x)\phi_{k-۲}(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_{k-۲}^{۲}(x)dx}$$

رابطه برازش حداقل مربعات نسبت به توابع عمود بر هم :

$$f(x) \simeq \sum_{k=۰}^{n} c_k\phi_k(x) \quad : \quad c_k = \frac{\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_k^{۲}(x)dx}$$

مساحت یک مخروط قائم با قاعده : $S = \pi r\sqrt{h^{۲} + r^{۲}} + \pi r^{۲}$

حجم یک مخروط قائم با قاعده : $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$

بطوریکه r و h به ترتیب شعاع قاعده مخروط و ارتفاع آن است.