حل امتحان میان ترم روشهای محاسبات عددی ۹۳/۸/۲۶

۱- با قضیه : چون خطای نسبی برابر $۸/۵\times۱۰^{-۸}$ و کمتر از ۵×۱۰^{-۷} است، پس حداقل ۷ رقم با معنی صحیح داریم یعنی عدد مورد نظر تقریبا برابر ۳/۱۴۱۵۹۳ است.

بدون قضیه :

$$(\frac{۳۵۵}{۱۱۳},۸/۵\times۱۰^{-۶})\to\frac{\Delta Q}{|Q|}\le ۸/۵\times۱۰^{-۸}\to\to \Delta Q\le ۸/۵\times۱۰^{-۸}\,|Q| \quad , \ |Q|\le|Q_۱|+\Delta Q$$

$$\Delta Q\le ۸/۵\times۱۰^{-۸}(|Q_۱|+\Delta Q)\Rightarrow \Delta Q\le ۲/۶۷\times۱۰^{-۷}<۰/۵(۰/۰۰۰۰۰۱)$$

پس آخرین رقم با معنی صحیح رقم ششم اعشار است، یعنی عدد مورد نظر ۷ رقم با معنی صحیح دارد.

با قضیه : چون خطای نسبی برابر $۱/۵\times۱۰^{-۶}$ و کمتر از ۵×۱۰^{-۶} است، پس حداقل ۶ رقم با معنی صحیح داریم یعنی عدد مورد نظر تقریبا برابر ۳۲۲۸/۱۴ است.

$$(۳۲۲۸/۱۴,۱/۵\times۱۰^{-۴})\to\frac{\Delta Q}{|Q|}\le ۱/۵\times۱۰^{-۶}\to\to \Delta Q\le ۱/۵\times۱۰^{-۶}\,|Q| \quad , \ |Q|\le|Q_۱|+\Delta Q$$

$$\Delta Q\le ۱/۵\times۱۰^{-۶}(|Q_۱|+\Delta Q)\Rightarrow \Delta Q\le ۴/۸۴\times۱۰^{-۳}<۰/۵(۰/۰۱)$$

پس آخرین رقم با معنی صحیح رقم دوم اعشار است، یعنی عدد مورد نظر ۶ رقم با معنی صحیح دارد.

۲- الف-

$$a_n=\frac{۱}{۲n-۱}-۲a_{n-۱} \quad , \ a_۰=۰/۳۰۲\to a_۱=۱-۲a_۰=۰/۳۹۶\to a_۲=\frac{۱}{۳}-۲a_۱=-۰/۴۵۸$$

ب-

$$a_۰=۰/۳۰۲۳\to a_۱=۱-۲a_۰=۰/۳۹۵۴\to a_۲=\frac{۱}{۳}-۲a_۱=-۰/۴۵۷۵\to a_۳=\frac{۱}{۵}-۲a_۲=۱/۱۱۵$$

$$\to a_۴=\frac{۱}{۷}-۲a_۳=-۲/۰۸۷۱\to a_۵=\frac{۱}{۹}-۲a_۴=۴/۲۸۵۳\to a_۶=\frac{۱}{۱۱}-۲a_۵=-۸/۴۷۹۷$$

۳- این معادله فقط یک ریشه مثبت دارد. زیرا در $p(x)$ فقط یک تغییر علامت وجود دارد.

$$p(x)=۱۲x^۴+۴۷x^۳+۵۰x^۲-۲۹x-۳۰=۰\to p(-x)=۱۲x^۴-۴۷x^۳+۵۰x^۲+۲۹x-۳۰=۰$$

همچنین سه یا یک ریشه منفی وجود دارد، بطوریکه وجود یک ریشه منفی حتمی است. زیرا در $p(-x)$ سه تغییر علامت وجود دارد.

محدوده اندازه ریشه‌ها :

$$\begin{cases} ۱+\dfrac{۱}{|a_۰|}\max\{|a_۱|,|a_۲|,\dots,|a_n|\}=۱+\dfrac{۵۰}{۱۲}=\dfrac{۳۱}{۶} \\ \dfrac{|a_n|}{|a_n|+\max\{|a_۰|,|a_۱|,\dots,|a_{n-۱}|\}}=\dfrac{۳۰}{۳۰+۵۰}=\dfrac{۳}{۸} \end{cases}\to\frac{۳}{۸}\le|x|\le\frac{۳۱}{۶}$$

در بازه $[۰,۱]$، قضیه بولتزانو برقرار است.(چندجمله‌ای پیوسته است) و $f(۰)=-۳۰ \ , \ f(۱)=۱۴$ پس حداقل یک ریشه در این فاصله وجود دارد. در بازه $[-۱,۰]$، قضیه بولتزانو برقرار است.(چندجمله‌ای پیوسته است) و $f(-۱)=۵۰ \ , \ f(۰)=-۳۰$ پس حداقل یک ریشه در این فاصله وجود دارد.

تعیین ریشه‌های کسری :

$$a_{۰} = ۱۲ \ , \ a_n = -۳۰ \rightarrow \frac{\pm ۱ \ \pm ۲ \ \pm ۳ \ \pm ۵ \ \pm ۶ \ \pm ۱۰ \ \pm ۱۵ \ \pm ۳۰}{\pm ۱ \ \pm ۲ \ \pm ۳ \ \pm ۴ \ \pm ۶ \ \pm ۱۲}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\pm ۱}{\pm ۱} = \pm ۱ \\ \frac{\pm ۲}{\pm ۱} = \pm ۲ \\ \frac{\pm ۳}{\pm ۱} = \pm ۳ \\ \frac{\pm ۵}{\pm ۱} = \pm ۵ \\ \frac{\pm ۶}{\pm ۱} = \pm ۶ \\ \frac{\pm ۱۰}{\pm ۱} = \pm ۱۰ \\ \frac{\pm ۱۵}{\pm ۱} = \pm ۱۵ \\ \frac{\pm ۳۰}{\pm ۱} = \pm ۳۰ \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} \frac{\pm ۱}{\pm ۲} = \pm \frac{۱}{۲} \\ \frac{\pm ۲}{\pm ۲} = \pm ۱ \\ \frac{\pm ۳}{\pm ۲} = \pm \frac{۳}{۲} \\ \frac{\pm ۵}{\pm ۲} = \pm \frac{۵}{۲} \\ \frac{\pm ۶}{\pm ۲} = \pm ۳ \\ \frac{\pm ۱۰}{\pm ۲} = \pm ۵ \\ \frac{\pm ۱۵}{\pm ۲} = \pm \frac{۱۵}{۲} \\ \frac{\pm ۳۰}{\pm ۲} = \pm ۱۵ \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} \frac{\pm ۱}{\pm ۳} = \pm \frac{۱}{۳} \\ \frac{\pm ۲}{\pm ۳} = \pm \frac{۲}{۳} \\ \frac{\pm ۳}{\pm ۳} = \pm ۱ \\ \frac{\pm ۵}{\pm ۳} = \pm \frac{۵}{۳} \\ \frac{\pm ۶}{\pm ۳} = \pm ۲ \\ \frac{\pm ۱۰}{\pm ۳} = \pm \frac{۱۰}{۳} \\ \frac{\pm ۱۵}{\pm ۳} = \pm ۵ \\ \frac{\pm ۳۰}{\pm ۳} = \pm ۱۰ \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} \frac{\pm ۱}{\pm ۴} = \pm \frac{۱}{۴} \\ \frac{\pm ۲}{\pm ۴} = \pm \frac{۱}{۲} \\ \frac{\pm ۳}{\pm ۴} = \pm \frac{۳}{۴} \\ \frac{\pm ۵}{\pm ۴} = \pm \frac{۵}{۴} \\ \frac{\pm ۶}{\pm ۴} = \pm \frac{۳}{۲} \\ \frac{\pm ۱۰}{\pm ۴} = \pm \frac{۵}{۲} \\ \frac{\pm ۱۵}{\pm ۴} = \pm \frac{۱۵}{۴} \\ \frac{\pm ۳۰}{\pm ۴} = \pm \frac{۱۵}{۲} \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} \frac{\pm ۱}{\pm ۶} = \pm \frac{۱}{۶} \\ \frac{\pm ۲}{\pm ۶} = \pm \frac{۱}{۳} \\ \frac{\pm ۳}{\pm ۶} = \pm \frac{۱}{۲} \\ \frac{\pm ۵}{\pm ۶} = \pm \frac{۵}{۶} \\ \frac{\pm ۶}{\pm ۶} = \pm ۱ \\ \frac{\pm ۱۰}{\pm ۶} = \pm \frac{۵}{۳} \\ \frac{\pm ۱۵}{\pm ۶} = \pm \frac{۵}{۲} \\ \frac{\pm ۳۰}{\pm ۶} = \pm ۵ \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} \frac{\pm ۱}{\pm ۱۲} = \pm \frac{۱}{۱۲} \\ \frac{\pm ۲}{\pm ۱۲} = \pm \frac{۱}{۶} \\ \frac{\pm ۳}{\pm ۱۲} = \pm \frac{۱}{۴} \\ \frac{\pm ۵}{\pm ۱۲} = \pm \frac{۵}{۱۲} \\ \frac{\pm ۶}{\pm ۱۲} = \pm \frac{۱}{۲} \\ \frac{\pm ۱۰}{\pm ۱۲} = \pm \frac{۵}{۶} \\ \frac{\pm ۱۵}{\pm ۱۲} = \pm \frac{۵}{۴} \\ \frac{\pm ۳۰}{\pm ۱۲} = \pm \frac{۵}{۲} \end{array}\right.$$

با توجه به محدوده ریشه‌ها، و تکراری بودن برخی از موارد فوق، فقط ۱۹ مورد وجود دارد که امکان دارد ریشه کسری چندجمله‌ای داده شده باشند. بر اساس نتایج بدست آمده برای بازه‌های $[۰,۱],[-۱,۰]$، فقط لازم است ۹ مورد از ریشه‌های کسری بررسی شوند. با بررسی این موارد ، مقدار $-\frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}$ ریشه‌های کسری معادله هستند. و این معادله ریشه‌های کسری دیگر ندارد.

۴-

$$p(x) = ۲x^{۳} + ۹x^{۲} + ۷x - ۶ = ۰$$

$$k = ۱ : \ p(x)p(\text{-}x) \xrightarrow{x^{۲} \to x} p_{۱}(x) = -۴x^{۳} + ۵۳x^{۲} - ۱۵۷x + ۳۶ = ۰$$

$$k = ۲ : \ p_{۱}(x)p_{۱}(\text{-}x) \xrightarrow{x^{۲} \to x} p_{۲}(x) = -۱۶x^{۳} + ۱۵۵۳x^{۲} - ۲۰۸۳۳x + ۱۲۹۶ = ۰$$

$$k = ۳ : \ p_{۲}(x)p_{۲}(\text{-}x) \xrightarrow{x^{۲} \to x} p_{۳}(x) = -۲۵۶x^{۳} + ۱۷۴۵۱۵۳x^{۲} - ۴۲۹۹۸۸۵۱۳x + ۱۶۷۹۶۱۶ = ۰$$

$$k = ۱ : \ \sqrt{\frac{۳۶}{۱۵۷}} \simeq ۰/۴۷۸۹ \ , \ \sqrt{\frac{۱۵۷}{۵۳}} \simeq ۱/۷۲۱۱ \ , \ \sqrt{\frac{۵۳}{۴}} \simeq ۳/۶۴۰۱$$

$$k = ۲ : \ \sqrt[۴]{\frac{۱۲۹۶}{۲۰۸۳۳}} \simeq ۰/۴۹۹۴ \ , \ \sqrt[۴]{\frac{۲۰۸۳۳}{۱۵۵۳}} \simeq ۱/۹۱۳۸ \ , \ \sqrt[۴]{\frac{۱۵۵۳}{۱۶}} \simeq ۳/۱۳۸۸$$

$$k = ۳ : \ \sqrt[۸]{\frac{۱۶۷۹۶۱۶}{۴۲۹۹۸۸۵۱۳}} \simeq ۰/۵۰۰۰ \ , \ \sqrt[۸]{\frac{۴۲۹۹۸۸۵۱۳}{۱۷۴۵۱۵۳}} \simeq ۱/۹۹۰۵ \ , \ \sqrt[۸]{\frac{۱۷۴۵۱۵۳}{۲۵۶}} \simeq ۳/۰۱۴۴$$

با آزمودن مقدار مقادیر بدست آمده و منفی آنها در معادله اصلی، نتیجه می‌شود که ریشه‌های تقریبی برابر ۰/۵۰۰ و ۱/۹۹۱- و ۳/۰۱۴- هستند.

۵-

$$\begin{cases} ۴a_۱+۲b_۱+c_۱=۰/۵ \\ ۴a_۲+۲b_۲+c_۲=۰/۵ \end{cases},\quad \begin{cases} c_۱=۱ \\ ۱۶a_۲+۴b_۲+c_۲=-۰/۵ \end{cases},\quad ۴a_۱+b_۱=۴a_۲+b_۲ \quad,\quad ۲a_۱=-\frac{\pi^۲}{۳۶}\to a_۱=-\frac{\pi^۲}{۷۲}$$

$$c_۱=۰/۵\xrightarrow{a_۱=-\frac{\pi^۲}{۷۲}} b_۱=\frac{\pi^۲}{۳۶}-\frac{۱}{۴}\to ۴a_۲+b_۲=-\frac{\pi^۲}{۳۶}-\frac{۱}{۴}$$

$$\begin{cases} ۴a_۲+۲b_۲+c_۲=۰/۵ \\ ۱۶a_۲+۴b_۲+c_۲=-۰/۵ \end{cases}\to ۱۲a_۲+۲b_۲=-۱\xrightarrow{۴a_۲+b_۲=-\frac{\pi^۲}{۳۶}-\frac{۱}{۴}} a_۲=\frac{\pi^۲}{۷۲}-\frac{۱}{۸}\to b_۲=-\frac{\pi^۲}{۱۲}+\frac{۱}{۴}\to c_۲=\frac{\pi^۲}{۹}+\frac{۱}{۲}$$

$$f(۳)=۹a_۲+۳b_۲+c_۲=-\frac{\pi^۲}{۷۲}+\frac{۱}{۸}\simeq -۰/۰۱۲$$

۶-

$$D=\frac{۱}{h}\left(\Delta-\frac{\Delta^۲}{۲}+\frac{\Delta^۳}{۳}-+\ldots\right)\to D^۲=\frac{۱}{h^۲}\left(\Delta-\frac{\Delta^۲}{۲}+\frac{\Delta^۳}{۳}-+\ldots\right)^۲=\frac{۱}{h^۲}\left(\Delta^۲-\Delta^۳+\frac{\Delta^۴}{۴}+۲\frac{\Delta^۴}{۳}+-\ldots\right)$$

$$\Delta=hD+\frac{h^۲}{۲!}D^۲+\frac{h^۳}{۳!}D^۳+\ldots\to\Delta^۴\propto h^۴\to\frac{۱}{h^۲}\Delta^۴\propto h^۲\Rightarrow D^۲=\frac{۱}{h^۲}(\Delta^۲-\Delta^۳)\to D^۲y_i=\frac{۱}{h^۲}(\Delta^۲-\Delta^۳)y_i$$

$$\Delta y_i=y_{i+۱}-y_i\to\Delta^۲y_i=\Delta(\Delta y_i)=y_{i+۲}-۲y_{i+۱}+y_i\to\Delta^۳y_i=y_{i+۳}-۳y_{i+۲}+۳y_{i+۱}-y_i$$

$$y_i''=\frac{-y_{i+۳}+۴y_{i+۲}-۵y_{i+۱}+۲y_i}{h^۲}$$

۷-

$$y'=x^۲+y\ ,\ y(۰)=۱\to y'(۰)=۱\quad,\quad y''=۲x+y'\to y''(۰)=۱$$

$$y(۰/۱)=y(۰)+\frac{۰/۱}{۱!}y'(۰)+\frac{۰/۱^۲}{۲!}y''(۰)=۱+۰/۱+۰/۰۰۵=۱/۱۰۵$$

۸-

$$y'=x^۲+y\ ,\ y(۰)=۱\ ,\ h=۰/۱$$

$$k_۱=hf(x_i,y_i)=۰/۱f(۰,۱)=۰/۱\ ,\ k_۲=hf(x_i+\frac{۱}{۲}h,y_i+\frac{۱}{۲}k_۱)=۰/۱f(۰+۰/۰۵,۱+۰/۰۵)=۰/۱۰۵۲۵$$

$$k_۳=hf(x_i+\frac{۱}{۴}h,y_i+\frac{۳}{۱۶}k_۱+\frac{۱}{۱۶}k_۲)=۰/۱f(۰+۰/۰۲۵,۱+۰/۰۱۸۷۵+۰/۰۰۶۵۷۸۱۲۵)=۰/۱۰۲۵۹۵۳۱۲۵$$

$$k_۴=hf(x_i+\frac{۱}{۲}h,y_i+\frac{۱}{۲}k_۳)=۰/۱f(۰+۰/۰۵,۱+۰/۰۵۱۲۹۷۶۵۶۲۵)=۰/۱۰۵۳۷۹۷۶۵۶۲۵$$

$$k_۵=hf(x_i+\frac{۳}{۴}h,y_i-\frac{۳}{۱۶}k_۲+\frac{۶}{۱۶}k_۳+\frac{۹}{۱۶}k_۴)$$

$$=۰/۱f(۰+۰/۰۷۵,۱-۰/۰۱۹۷۳۴۳۷۵+۰/۰۳۸۴۷۳۲۴۲۱۸۷۵+۰/۰۵۹۲۷۶۱۱۸۱۶۴۰۶۲۵)=۰/۱۰۸۳۶۳۹۹۸۵۳۵۱۵۶۲۵$$

$$k_۶=hf(x_i+h,y_i+\frac{۱}{۷}k_۱+\frac{۴}{۷}k_۲+\frac{۶}{۷}k_۳-\frac{۱۲}{۷}k_۴+\frac{۸}{۷}k_۵)=۰/۱۱۱۵۵۶۰۹۵۳۶۸۳۰۳۵۷$$

$$y_{i+۱}=y_i+\frac{۷}{۹۰}k_۱+\frac{۳۲}{۹۰}k_۳+\frac{۱۲}{۹۰}k_۴+\frac{۳۲}{۹۰}k_۵+\frac{۷}{۹۰}k_۶=۱/۱۰۵۵۱۲۷۵۳۴$$

۹-

$$\Delta t=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{۸} \quad , \quad L=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{a^{۲}\sin^{۲}(t)+b^{۲}\cos^{۲}(t)}dt=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۳\sin^{۲}(t)+۱}dt=۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۲/۵-۱/۵\cos(۲t)}dt$$

$$f(t)=\sqrt{۲/۵-۱/۵\cos(۲t)}$$

$$I=\frac{\Delta x}{۳}[f(t_۰)+۴f(t_۱)+۲f(t_۲)+۴f(t_۳)+f(t_۴)]=\frac{\pi}{۶}[f(۰)+۴f(\frac{\pi}{۸})+۲f(\frac{\pi}{۴})+۴f(\frac{۳\pi}{۸})+f(\frac{\pi}{۲})]$$

$$I=\frac{\pi}{۶}[\sqrt{۱}+۴\sqrt{۲/۵-\frac{۱/۵}{\sqrt{۲}}}+۲\sqrt{۲/۵}+۴\sqrt{۲/۵+\frac{۱/۵}{\sqrt{۲}}}+\sqrt{۴}]=\frac{\pi}{۶}[۱+۴/۷۹۸۹+۳/۱۶۲۳+۷/۵۴۷۹+۲]\simeq ۹/۶۹۱۳$$

-۱۰

$$I=\int_{-۲}^{۰}\int_{۱}^{۳}(xy)dydx \quad , \quad \int_{-۱}^{۱}f(t)dx\simeq ۲f(۰) \qquad y=t+۲$$

$$I=\int_{-۲}^{۰}\int_{-۱}^{۱}(x(t+۲))dtdx\simeq\int_{-۲}^{۰}x\times ۲(۰+۲)dx=۴\int_{-۲}^{۰}xdx \qquad x=t-۱$$

$$I\simeq ۴\int_{-۱}^{۱}(t-۱)dt\simeq ۸(۰-۱)=-۸$$

$$I=\int_{-۲}^{۰}\int_{۱}^{۳}(xy)dydx=\int_{-۲}^{۰}x\frac{y^{۲}}{۲}\Big|_{۱}^{۳}dx=\int_{-۲}^{۰}۴xdx=۲x^{۲}\Big|_{-۲}^{۰}=-۸$$

خطا صفر است. زیرا روش گوس- لژاندر یک نقطه‌ای برای توابع چندجمله‌ای تا درجه ۱ دقیق است و تابع مورد نظر نیز بر حسب دو متغیر خطی است.