حل امتحان پایان ترم روشهای محاسبات عددی ۹۳/۱۰/۱۳

۱- معادلات بد وضع نیستند. زیرا دترمینان ماتریس A ، با عناصر آن قابل مقایسه است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \to |A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۳-۲=۱$$

۲-

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۲ \\ x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = ۴ \\ x_۲ + ۲x_۳ = ۳ \end{cases} \to \begin{cases} x_۱ = ۲ - x_۲ \\ x_۲ = ۲ - ۰/۵x_۱ - ۰/۵x_۳ \\ x_۳ = ۱/۵ - ۰/۵x_۲ \end{cases} \to \begin{cases} x_۱^{(k)} = -\frac{۱}{۳}x_۱^{(k)} + \frac{۴}{۳}(۲ - x_۲^{(k-۱)}) \\ x_۲^{(k)} = -\frac{۱}{۳}x_۲^{(k-۱)} + \frac{۴}{۳}(۲ - ۰/۵x_۱^{(k)} - ۰/۵x_۳^{(k-۱)}) \\ x_۳^{(k)} = -\frac{۱}{۳}x_۳^{(k-۱)} + \frac{۴}{۳}(۱/۵ - ۰/۵x_۲^{(k)}) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۲/۶۶۷ \\ ۰/۸۸۹ \\ ۱/۴۰۷ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۰/۵۹۲ \\ ۱/۰۳۸ \\ ۰/۸۳۹ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱/۰۸۵ \\ ۱/۰۳۸ \\ ۱/۰۲۸ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۰/۹۲۱ \\ ۱/۰۲۱ \\ ۰/۹۷۷ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۰/۹۹۸ \\ ۱/۰۱۰ \\ ۱/۰۰۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۰/۹۸۷ \\ ۱/۰۰۵ \\ ۰/۹۹۶ \end{bmatrix}$$

۳- چون ماتریس و معکوس آن متقارن هستند، نرم ۱ و بینهایت یکسان است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \to \|A\|_۱ = \max_j \sum_{i=۱}^{m} |a_{ij}| = \max(|۱|+|۱|, |۱|+|۲|+|۱|, |۱|+|۲|) = ۴$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}| = \max(|۱|+|۱|, |۱|+|۲|+|۱|, |۱|+|۲|) = ۴$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \to |A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۳-۲=۱ \quad (-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۳ \;,\; (-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = -۲ \;,\; (-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱$$

$$(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۲ \;,\; (-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۲ \;,\; (-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱ \;,\; (-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۱ \;,\; (-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۱$$

$$(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱ \Rightarrow A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۱ \\ -۲ & ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \|A^{-۱}\|_۱ = \max_j \sum_{i=۱}^{m} |a_{ij}| = \max(|۳|+|-۲|+|۱|, |-۲|+|۲|+|-۱|, |۱|+|-۱|+|۱|) = ۶ \\ \|A^{-۱}\|_\infty = \max_i \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}| = \max(|۳|+|-۲|+|۱|, |-۲|+|۲|+|-۱|, |۱|+|-۱|+|۱|) = ۶ \end{cases} \Rightarrow c_۱(A) = c_\infty(A) = ۲۴$$

۴-

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \to M_۲^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \to M_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A_۱ = M_۲^{-۱} A M_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$M_۱^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow M_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow A_۲ = M_۱^{-۱} A_۱ M_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A_۲ = J = \begin{bmatrix} ۵ & ۱۴ & -۱۴ \\ ۱ & ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۴ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^۳ - ۵\lambda^۲ + ۶\lambda - ۱ = ۰$$

-۵

$$\begin{cases} y = \sqrt{۱۰/۲۵ - x^۲} = f \\ x = -۰/۷۵y + ۳/۱۲۵ = g \end{cases} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{۱۰/۲۵ - x^۲}}, \frac{\partial f}{\partial y} = ۰, \frac{\partial g}{\partial x} = ۰, \frac{\partial g}{\partial y} = -۰/۷۵$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{۱}{\sqrt{۹/۲۵}} < ۱ \ , \ \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = ۰/۷۵ < ۱$$

پس روش تکرار با این نقطه شروع همگرا است.

$$\begin{cases} y = \sqrt{۱۰/۲۵ - x^۲} \\ x = -۰/۷۵y + ۳/۱۲۵ \end{cases} \quad \begin{cases} x_۰ = ۱ \\ y_۰ = ۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۰/۸۷۵ \\ y_۱ = ۳/۰۴۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۲ = ۰/۸۴۴ \\ y_۲ = ۳/۰۸۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۳ = ۰/۸۱۵ \\ y_۳ = ۳/۰۸۸ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۴ = ۰/۸۰۹ \\ y_۴ = ۳/۰۹۶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_۵ = ۰/۸۰۳ \\ y_۵ = ۳/۰۹۸ \end{cases}$$

-۶

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱۰/۲۵ \\ ۴x + ۳y = ۱۲/۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_۱ = x^۲ + y^۲ - ۱۰/۲۵ = ۰ \\ f_۲ = ۴x + ۳y - ۱۲/۵ = ۰ \end{cases} \rightarrow F = \begin{bmatrix} f_۱ \\ f_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۲۵ \\ ۰/۵ \end{bmatrix} \ , \ F' = \begin{bmatrix} ۲x & ۲y \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$(F')^{-۱} = \frac{۱}{-۱۸} \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad (F')^{-۱} F = \frac{۱}{-۱۸} \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۲۵ \\ ۰/۵ \end{bmatrix} = \frac{۱}{-۱۸} \begin{bmatrix} -۳/۷۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$[F''(x)]_{ijk} = \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_k \partial x_j} \rightarrow [F''(x^{(۰)})]_{۱۱۱} = ۲ \ , \ [F''(x^{(۰)})]_{۱۲۱} = ۰ \ , \ [F''(x^{(۰)})]_{۱۱۲} = ۰ \ , \ [F''(x^{(۰)})]_{۱۲۲} = ۲$$

$$[F''(x^{(۰)})]_{۲۱۱} = ۰ \ , \ [F''(x^{(۰)})]_{۲۲۱} = ۰ \ , \ [F''(x^{(۰)})]_{۲۱۲} = ۰ \ , \ [F''(x^{(۰)})]_{۲۲۲} = ۰$$

$$\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \frac{۱}{-۱۸} \begin{bmatrix} -۳/۷۵ \\ ۲ \end{bmatrix} \right)^T = \frac{۱}{-۱۸} \begin{bmatrix} -۷/۵ & ۴ \end{bmatrix} \ , \ \left(\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \frac{۱}{-۱۸} \begin{bmatrix} -۳/۷۵ \\ ۲ \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \quad (F')^{-۱} F = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۱۲} & \frac{-۲}{۹} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$L_F = \frac{۱}{-۱۸}\begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۱۲ & ۹ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-۵}{۷۲} & \frac{۱}{۲۷} \\ \frac{۵}{۵۴} & \frac{-۴}{۸۱} \end{bmatrix} \quad , \quad x^{(۱)} = x^{(۰)} - \left\{ I + \tfrac{۱}{۲} L_F(x^{(k)}) \right\} (F'^{(۰)})^{-۱} F^{(۰)}$$

$$x^{(۱)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-۵}{۱۴۴} & \frac{۱}{۵۴} \\ \frac{۵}{۱۰۸} & \frac{-۲}{۸۱} \end{bmatrix} \right\} \frac{۱}{-۱۸}\begin{bmatrix} -۳/۷۵ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{۱۳۹}{۱۴۴} & \frac{۱}{۵۴} \\ \frac{۵}{۱۰۸} & \frac{۷۹}{۸۱} \end{bmatrix} \frac{۱}{-۱۸}\begin{bmatrix} -۳/۷۵ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۸۰۱۰ \\ ۳/۰۹۸۷ \end{bmatrix}$$

-۷

$$y = \sqrt[۳]{ax+b} \rightarrow y^{۳} = ax+b \rightarrow f_۱(x) = x \ , \ f_۲(x) = ۱$$

$$F = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۹ & ۱ \\ ۷۳ & ۱ \end{bmatrix} , \ c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} , \ Y = \begin{bmatrix} ۲^{۳} \\ ۴^{۳} \\ ۸^{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۶۴ \\ ۵۱۲ \end{bmatrix} \rightarrow F^T F = \begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۷۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۹ & ۱ \\ ۷۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۴۱۱ & ۸۳ \\ ۸۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$F^T Y = \begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۷۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۸ \\ ۶۴ \\ ۵۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۷۹۶۰ \\ ۵۸۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵۴۱۱ & ۸۳ \\ ۸۳ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۷۹۶۰ \\ ۵۸۴ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{۱}{۹۳۴۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۸۳ \\ -۸۳ & ۵۴۱۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳۷۹۶۰ \\ ۵۸۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$y\Big|_{x=۱} = ۲ \ , \ y\Big|_{x=۹} = ۴ \ , \ y\Big|_{x=۷۳} = ۸ \rightarrow \sum_{j=۱}^{۳} \delta_j^{۲} = ۰$$

-۸

$$\phi_۰(x) = ۱ \ , \ \phi_۱(x) = x - B_۱ \quad : \quad B_۱ = \frac{\int_a^b x w(x)\phi_۰^{۲}(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_۰^{۲}(x)dx} = \frac{\int_{-۱}^{۱} x^{۳}dx}{\int_{-۱}^{۱} x^{۲}dx} = ۰ \Rightarrow \phi_۱(x) = x$$

$$\phi_۲(x) = (x - B_۲)\phi_۱(x) - C_۲\phi_۰(x) \qquad B_۲ = \frac{\int_a^b x w(x)\phi_۱^{۲}(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_۱^{۲}(x)dx} = \frac{\int_{-۱}^{۱} x^{۵}dx}{\int_{-۱}^{۱} x^{۴}dx} = ۰$$

$$C_۲ = \frac{\int_a^b x w(x)\phi_۱(x)\phi_۰(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_۰^{۲}(x)dx} = \frac{\int_{-۱}^{۱} x^{۴}dx}{\int_{-۱}^{۱} x^{۲}dx} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۲}{۳}} = ۰/۶ \Rightarrow \phi_۲(x) = x^{۲} - ۰/۶$$

$$f(x) \simeq \sum_{k=۰}^{n} c_k \phi_k(x) \quad : \quad c_۰ = \frac{\int_a^b w(x)\phi_۰(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_۰^{۲}(x)dx} = \frac{\int_{-۱}^{۱} x^{۵}dx}{\int_{-۱}^{۱} x^{۲}dx} = ۰$$

$$c_۱ = \frac{\int_a^b w(x)\phi_۱(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_۱^{۲}(x)dx} = \frac{\int_{-۱}^{۱} x^{۶}dx}{\int_{-۱}^{۱} x^{۴}dx} = \frac{\frac{۲}{۷}}{\frac{۲}{۵}} = \frac{۵}{۷} \ , \ c_۲ = \frac{\int_a^b w(x)\phi_۲(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_۲^{۲}(x)dx} = \frac{\int_{-۱}^{۱} x^{۵}(x^{۲} - ۰/۶)dx}{\int_{-۱}^{۱} x^{۲}(x^{۲} - ۰/۶)^{۲}dx} = ۰$$

$$f(x) \simeq \frac{۵}{۷}x \quad , \ \int_{-۱}^{۱} (\frac{۵}{۷}x - x^{۳})^{۲}dx = \int (\frac{۲۵}{۴۹}x^{۲} - \frac{۱۰}{۷}x^{۴} + x^{۶})dx = \frac{۲۵}{۴۹} \times \frac{۲}{۳} - \frac{۱۰}{۷} \times \frac{۲}{۵} + \frac{۲}{۷} = \frac{۸}{۱۴۷}$$

-۹

$$\begin{cases}-x_۱+۵x_۲+۲x_۳+۵x_۴\le ۵\\ ۳x_۲+x_۴=۲\\ -x_۱+x_۳+۲x_۴=۱\\ \forall j\ :\ x_j\ge ۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-x_۱+۵x_۲+۲x_۳+۵x_۴\le ۵\\ ۳x_۲+x_۴\le ۲\\ -۳x_۲-x_۴\le -۲\\ -x_۱+x_۳+۲x_۴\le ۱\\ x_۱-x_۳-۲x_۴\le -۱\end{cases}\rightarrow A=\begin{bmatrix}-۱&۵&۲&۵\\ ۰&۳&۰&۱\\ ۰&-۳&۰&-۱\\ -۱&۰&۱&۲\\ ۱&۰&-۱&-۲\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}۵\\ ۲\\ -۲\\ ۱\\ -۱\end{bmatrix}$$

$$f=۵x_۲+x_۳+۴x_۴\rightarrow c=\begin{bmatrix}۰&۵&۱&۴\end{bmatrix}$$

$$A'=\begin{bmatrix}-۱&۰&۰&-۱&۱\\ ۵&۳&-۳&۰&۰\\ ۲&۰&۰&۱&-۱\\ ۵&۱&-۱&۲&-۲\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}-y_۱-y_۴+y_۵\ge ۰\\ ۵y_۱+۳y_۲-۳y_۳\ge ۵\\ ۲y_۱+y_۴-y_۵\ge ۱\\ ۵y_۱+y_۲-y_۳+۲y_۴-۲y_۵\ge ۴\end{cases}\quad :\ \min F=۵y_۱+۲y_۲-۲y_۳+y_۴-y_۵$$

اگر فرض کنیم : $y_۲-y_۳=y_۶\ ,\ y_۴-y_۵=y_۷$ در این صورت دوگان به ساده‌ترین فرم بصورت زیر تعریف می شود :

$$\begin{cases}-y_۱-y_۷\ge ۰\\ ۵y_۱+۳y_۶\ge ۵\\ ۲y_۱+y_۷\ge ۱\\ ۵y_۱+y_۶+۲y_۷\ge ۴\end{cases}\quad :\ \min F=۵y_۱+۲y_۶+y_۷$$

-۱۰

$$S=\pi r\sqrt{h^۲+r^۲}+\pi r^۲=\pi\rightarrow r\pi\sqrt{h^۲+r^۲}+\pi r^۲-\pi=۰$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h\rightarrow L=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h-\lambda(r\pi\sqrt{h^۲+r^۲}+\pi r^۲-\pi)=۰$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=۰\rightarrow\frac{۲}{۳}\pi rh-\lambda\pi\left[\sqrt{h^۲+r^۲}+\frac{r^۲}{\sqrt{h^۲+r^۲}}+۲r\right]=۰\rightarrow\frac{۲}{۳}rh=\frac{۲r^۲+h^۲}{\sqrt{h^۲+r^۲}}+۲r\quad (I)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h}=۰\rightarrow\frac{۱}{۳}\pi r^۲-\lambda\pi r\frac{h}{\sqrt{h^۲+r^۲}}=۰\rightarrow\frac{۱}{۳}r=\lambda\frac{h}{\sqrt{h^۲+r^۲}}\quad (II)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=۰\rightarrow r\pi\sqrt{h^۲+r^۲}+\pi r^۲-\pi=۰\rightarrow r\sqrt{h^۲+r^۲}+r^۲-۱=۰\quad (III)$$

$$(I),(II)\rightarrow ۲h=\frac{۲r^۲+h^۲+۲r\sqrt{h^۲+r^۲}}{h}\rightarrow h^۲=۲r^۲+۲r\sqrt{h^۲+r^۲}\xrightarrow{(III)}h^۲=۲\rightarrow h=\sqrt{۲}$$

$$(III)\rightarrow r\sqrt{۲+r^۲}=-r^۲+۱\rightarrow r^۲(۲+r^۲)=(۱-r^۲)^۲\rightarrow r^۲=۰/۲۵\rightarrow r=۰/۵\rightarrow V=\frac{\pi\sqrt{۲}}{۱۲}$$