دانشکده مهندسی برق
گروه کنترل

تاریخ: ۹۴/۹/۲
وقت : ۲ ساعت

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

روشهای محاسبات عددی

امتحان میان ترم

۱۳۰۷
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس : رسول دلیرروی فرد

فقط به ٦ سوال پاسخ دهید.

۱- در هر یک از زوج اعداد زیر ، اولین و دومین عدد به ترتیب ، عدد تقریبی و حد بالای خطای درصد آن هستند. (با و بدون قضیه) تعداد ارقام با معنی صحیح آن را تعیین کنید. $(۳/۴۸,۰/۷\%)$ $(۱۳۱۴۶,۰/۱\%)$

۲- سطح کره‌ای به شعاع $\frac{۷}{۳}$ متر را با ۳ رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای مطلق آن را تعیین کنید. $S=۴\pi r^۲$

۳- فقط بر اساس قضایای گفته شده، تعداد، محدوده، ماکزیمم و می‌نیمم اندازه، و نوع ریشه‌های معادله $۲x^۳+۹x^۲+۷x-۶=۰$ را تعیین کنید. آیا این معادله ریشه‌های کسری دارد؟ در صورت جواب مثبت مقدار آن را بر اساس قضیه مربوط به آن تعیین کنید.

۴- با استفاده از روش Graffe ، معادله $x^۳-۶x^۲+۱۱x-۶=۰$ را حل نمائید. سه مرحله اجرای الگوریتم کافی است.

۵- با استفاده از روش بسط تیلور نشان دهید که خطای فرمول زیر متناسب با چه مرتبه‌ای از h است.

$$f_i^{(۴)}=\frac{f_{i+۲}-۴f_{i+۱}+۶f_i-۴f_{i-۱}+f_{i-۲}}{h^۴}+\text{error}$$

۶- جدول ذیل داده شده است. چندجمله‌ای درونیاب تابع فوق را با استفاده از روش لاگرانژ بدست آورید.

x	۰	۱	۲
f(x)	۱	۰/۵	$\frac{۱}{۳}$

با فرض آنکه $f(x)=\frac{۱}{۱+x}$ و p(x) چندجمله‌ای درونیاب تابع f(x) در نقاط داده شده باشد، کران بالایی برای قدر مطلق خطای درونیابی در بازه $[۰,۲]$ یافته و ماکزیمم آن را بدست آورید.

۷- جواب تقریبی معادله زیر را در فاصله داده شده با روش رانگ کوتا مرتبه ۲ (پیراسته اویلر) با محاسبات چهار رقم اعشار بدست آورید. $y'=\cos(۲x)+\sin(۳y)\ ,\ ۰\le x\le ۰/۸\ ,\ y(۰)=۱\ ,\ h=۰/۲$

۸- با استفاده از روش رانگ- کوتا مرتبه ۴ (Kutta)، و محاسبات ۴ رقم اعشار، معادله دیفرانسیل ذیل را حل کنید :

$$y''+xy=۰\ ,\ ۰\le x\le ۰/۱\ ,\ y(۰)=۱\ ,\ y'(۰)=۰/۵\ ,\ h=۰/۱$$

۹- با توجه به مقادیر محاسبه شده زیر برای یک انتگرال، یک تقریب با حداکثر دقت با روش رامبرگ بیابید. نتیجه نهایی از چه دقتی برخوردار است؟چرا؟ $T_۲=۰/۹۵۶۴۱۸۶۲\ ,\ T_۴=۱/۲۱۶۲۸۸۳۶\ ,\ T_۸=۱/۲۲۷۶۵۲۵۳$

۱۰- برای تقریب انتگرال $\int_۰^۲ f(x)dx$ در مسئله ۶، از انتگرال تابع درونیاب آن استفاده می‌شود. مقدار تقریبی انتگرال را بدست آورده وآن را با مقدار واقعی آن مقایسه نمائید.

موفق باشید

دانشکده مهندسی برق گروه کنترل تاریخ: ۹۴/۹/۲ وقت : ۲ ساعت	بنام آنکه جان را فکرت آموخت روشهای محاسبات عددی امتحان میان ترم	۱۳۰۷ دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مدرس : رسول دلیرروی فرد

قضیه Rouche Bound : برای $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ داریم :

حدبالای اندازه ریشه‌ها : $1+\dfrac{1}{|a_0|}\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_n|\}$

حد پائین اندازه ریشه‌ها : $\dfrac{|a_n|}{|a_n|+\max\{|a_0|,|a_1|,\dots,|a_{n-1}|\}}$

روش درونیابی لاگرانژ :

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x)y_i \quad , \quad L_i(x)=\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad , \quad i=0,1,\dots,n$$

$$E(x)=\frac{\phi(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\varepsilon) \ , \ \phi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

روش رانگ- کوتا مرتبه ۲ (پیراسته اویلر) : $y'=f(x,y) \quad , \quad y(x_0)=y_0$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_i+hf(x_i,y_i))]$$

روش رانگ- کوتا مرتبه ۴ (Kutta) : $y'=f(x,y) \quad , \quad y(x_0)=y_0$

$$\begin{cases} k_1=hf(x_i,y_i) \ , \ k_2=hf(x_i+\frac{1}{3}h,y_i+\frac{1}{3}k_1) \\ k_3=hf(x_i+\frac{2}{3}h,y_i-\frac{1}{3}k_1+k_2) \quad , \quad k_4=hf(x_i+h,y_i+k_1-k_2+k_3) \\ y_{i+1}=y_i+\frac{1}{8}k_1+\frac{3}{8}k_2+\frac{3}{8}k_3+\frac{1}{8}k_4 \end{cases}$$

روش انتگرال گیری رامبرگ :

$$S_1=\frac{4T_2-T_1}{4-1},\ S_2=\frac{4T_4-T_2}{4-1} \ , \ \dots$$

$$R_1=\frac{4^2S_2-S_1}{4^2-1} \ , \ R_2=\frac{4^2S_4-S_2}{4^2-1} \ , \ \dots$$

....