جواب تمرین سری اول

۱-

$$a.\ p=e^{10}\ ,\ p^*=22000 \to p-p^* \simeq 26.5\ ,\ \frac{p-p^*}{p}=0.0012$$

$$b.\ p=\pi\ ,\ p^*=\frac{22}{7} \to p-p^* \simeq -0.0013\ ,\ \frac{p-p^*}{p}=-4.02\times 10^{-4}$$

$$c.\ p=8!\ ,\ p^*=39900 \to p-p^* \simeq 420\ ,\ \frac{p-p^*}{p}=0.0104$$

۲-

$$f(x)=e^x\cos(x) \to f'(x)=e^x\cos(x)-e^x\sin(x) \to f''(x)=-2e^x\sin(x)$$

$$P_2(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0) \to P_2(x)=1+x$$

قدر مطلق خطای واقعی $a.\ f(0.5)=1.4469\ ,\ P_2(x)=1.5 \to |f(0.5)-P_2(x)|=0.053$

جمله بعدی در بسط تیلور بزرگترین جمله خطا است. زیرا مقدار x کوچکتر از یک است. پس :

$$f'''(x)=-2e^x\sin(x)-2e^x\cos(x) \to \frac{x^3}{3!}f'''(0)=\frac{-x^3}{3} \to |E|_{max}=\frac{0.5^3}{3}=0.042$$

چون عملا جمله دوم وجود ندارد. ماکزیمم خطا کمتر از خطای واقعی شده است.

$$b.\ \frac{x^3}{3!}f'''(0)=\frac{-x^3}{3} \to |E|_{max,x\in[0,1]}=\frac{1}{3}$$

$$c.\ \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 e^x\cos(x)dx=\frac{۱}{۲}[e^x\cos(x)+e^x\sin(x)]\Big|_0^1=1.3780$$

$$\int_0^1 P_2(x)dx=\int_0^1(1+x)dx=(x+0.5x^2)\Big|_0^1=1.5$$

خطای واقعی $d.\ \int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 P_2(x)dx=0.1220$

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 P_2(x)dx\right| \le \int_0^1|f(x)-P_2(x)|dx=\int_0^1|R_2(x)|dx \simeq \int_0^1\left|\frac{-x^3}{3}\right|dx=\frac{x^4}{12}\Big|_0^1=\frac{1}{12}=0.083$$

۳-

$$P_2(x)=1-\frac{1}{2}x^2 \to E \simeq \frac{x^4}{4!} \to |E|_{max,-0.5\le x\le 0.5}=\frac{0.5^4}{4!}\simeq 0.0026$$

۴-

$$a.\ f(x)=x-3^{-x}=0 \to f'(x)=1-3^{-x}(-\ln 3)=1+(\ln 3)3^{-x}>0$$

بنابر قضیه ۱ (بولتزانو) تابع x و 3^{-x} هر دو پیوسته بوده و داریم : $f(0)=-1\ ,\ f(1)=\frac{2}{3}$ پس تابع f در فاصله [0,1] حداقل یک ریشه دارد. چون مشتق تابع همواره مثبت است (یکنوا) بنا بر قضیه ۲ تابع f ، در فاصله مذکور حداکثر یک ریشه داشته و لذا بنابر هر دو قضیه در این فاصله فقط یک ریشه دارد. تابع برای مقادیر منفی x ، منفی بوده و چون مشتق آن همواره مثبت است، در فاصله دیگر ریشه ندارد.

$$b.\ f(x)=4x-e^x=0 \to f'(x)=4-e^x$$

بنابر قضیه ۱ (بولتزانو) تابع 4x و e^x هر دو پیوسته بوده و داریم : $f(0)=-1\ ,\ f(1)>0$ پس تابع f در فاصله [0,1] حداقل یک ریشه دارد. چون مشتق تابع در این فاصله مثبت است (یکنوا) بنا بر قضیه ۲ تابع f ، در فاصله مذکور حداکثر یک

ریشه داشته و لذا بنابر هر دو قضیه در این فاصله فقط یک ریشه دارد. همچنین داریم : $f(1.5) > 0 \ , \ f(2.5) < 0$ پس تابع f در فاصله $[1.5,2.5]$ حداقل یک ریشه دارد. چون مشتق تابع در این فاصله منفی است (یکنوا) بنا بر قضیه ۲ تابع f ، در فاصله مذکور حداکثر یک ریشه داشته و لذا بنابر هر دو قضیه در این فاصله فقط یک ریشه دارد.

برای استفاده از قضیه روچه فرض کنید : $f(z) = 4z \, , g(z) = -e^z \quad : \quad \Gamma : |z| = 1$ در این صورت داریم :

$$|f(z)| = 4|z| = 4 \, , |g(z)| = |e^z| = \left|1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right| \le 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \ldots \simeq 2.72$$

لذا همه شرایط این قضیه برقرار بوده و چون تابع 4z در درون دایره به شعاع واحد فقط یک ریشه دارد، معادله اصلی نیز در درون همین دایره یک ریشه خواهد داشت.

c. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = (x-2)(3x+2)$

بنابر قضیه ۱ (بولتزانو) تابع چندجمله ای پیوسته بوده و داریم : $f(-2) < 0, f(-1) > 0, f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) < 0, f(4) > 0$

پس تابع f در هر یک از فواصل [-2,-1] ، [0,1] و [2,4] حداقل یک ریشه دارد. در هر یک از این فواصل ، به ترتیب مشتق همواره مثبت، منفی و مثبت بوده و بنابر قضیه ۲ ، حداکثر یک ریشه خواهد داشت. لذا در هر یک از این فواصل فقط یک ریشه داریم.

قضیه ریشه‌های کسری :

$$a_0 = 1, a_n = 3 \rightarrow \frac{\pm 3, \pm 1}{\pm 1} \rightarrow \begin{cases} \pm 3 \\ \pm 1 \end{cases}$$

با توجه به نتایج بدست آمده در استفاده از دو قضیه ۱ و ۲ ، فقط مقدار ۳ می‌تواند ریشه کسری معادله باشد که با آزمودن آن در معادله ثابت می‌شود که چنین است.

تعداد ریشه‌های مثبت : تعداد تغییر علامتها ۲ است. پس تعداد ریشه‌های مثبت ۲ یا صفر است.

$$f(-x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$$

تعداد ریشه‌های منفی : تعداد تغییر علامتها ۱ است. پس تعداد ریشه‌های منفی ۱ است.

d. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8.002x^2 + 4.002$

بنابر قضیه ۱ (بولتزانو) تابع چندجمله ای پیوسته بوده و داریم :

$$f(-3) < 0, f(-2.1) > 0 \, , f(-1) > 0, f(-0.7) < 0, f(-0.6) < 0, f(0) > 0$$

پس تابع f در فاصله [-3,-2.1] ، [-1,-0.7] و [-0.6,0] حداقل یک ریشه دارد. در هر یک از این فواصل ، به ترتیب مشتق همواره مثبت، منفی و مثبت بوده و بنابر قضیه ۲ ، حداکثر یک ریشه خواهد داشت. و لذا بنابر هر دو قضیه در این فواصل فقط یک ریشه دارد.

تعداد ریشه‌های مثبت : تعداد تغییر علامتها صفر است. پس ریشه مثبت ندارد.

$$f(-x) = -x^3 + 4.001x^2 - 4.002x + 1.101$$

تعداد ریشه‌های منفی : تعداد تغییر علامتها ۳ است. پس تعداد ریشه‌های منفی ۳ یا ۱ است.

قضیه ریشه‌های کسری : $1000x^3 + 4001x^2 + 4002x + 1101 = 0$

$$a_0 = 1000, a_n = 1101 \rightarrow \frac{\pm 1, \pm 3, \pm 367}{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 25, \pm 50, \pm 100, \pm 125, \pm 250, \pm 500, \pm 1000}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pm 1}{1,2,4,5,8,10,20,25,50,100,125,250,500,1000} \\ \dfrac{\pm 3}{1,2,4,5,8,10,20,25,50,100,125,250,500,1000} \\ \dfrac{\pm 367}{1,2,4,5,8,10,20,25,50,100,125,250,500,1000} \end{cases}$$

با توجه به نتایج ابتدایی، ریشه مثبت کسری ندارد. با آزمودن ریشه‌های منفی، مشخص می‌شود که هیچکدام از ریشه‌ها کسری نیست.

۵- روش وتری : در این روش می‌توان هر دو نقطه‌ای که در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ قرار دارد به عنوان نقطه شروع انتخاب نمود. چون خطا باید از 10^{-4} کمتر باشد، محاسبات میانی را با ۵ رقم اعشار انجام می‌دهیم.

$$x-\cos(x)=0 \quad \text{on} \quad [0,\frac{\pi}{2}] \rightarrow x_0=\frac{\pi}{2}, x_1=0, f(0)=-1, f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2} \quad , \quad x_{n+1}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

x_0	x_1	x_2
$\frac{\pi}{2}$	0	0.61102
0	0.61102	0.77153
0.61102	0.77153	0.73812
0.77153	0.73182	0.73903
0.73182	0.73903	0.73909

جواب با تقریب ۴ رقم اعشار برابر است با : 0.7391

روش نابجایی :

x_0	x_1	x_2	$f(x_2)$
$\frac{\pi}{2}$	0	0.61102	-0.20805
1.57080	0.61102	0.72327	-0.02638
1.57080	0.72327	0.73727	-0.00304
1.57080	0.73727	0.73888	-0.00035
1.57080	0.73888	0.73906	-0.00004
1.57080	0.73906	0.73908	-0.000005

جواب با تقریب ۴ رقم اعشار برابر است با : 0.7391

روش نابجایی اصلاح شده :

x_0	x_1	x_2	$f(x_2)$
$\frac{\pi}{2}$	0	0.61102	-0.20805
1.57080	0.61102	0.81201	0.12397
0.81201	0.61102	0.73696	-0.00355
0.81201	0.73696	0.73905	-0.00006
0.81201	0.73905	0.73912	0.00006

جواب با تقریب ۴ رقم اعشار برابر است با : 0.7391

۶-

$$V=L\left[0.5\pi r^2-r^2\arcsin(\frac{h}{r})-h\sqrt{(r^2-h^2)}\right]\rightarrow 12.4=10\left[0.5\pi-\arcsin(h)-h\sqrt{(1-h^2)}\right]$$

$$f(h)=0.5\pi-1.24-\arcsin(h)-h\sqrt{(1-h^2)}\rightarrow f'(h)=-\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}-\sqrt{1-h^2}-h\frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}}$$

$$f'(h)=-2\sqrt{1-h^2} \qquad h_{n+1}=h_n-\frac{f(h_n)}{f'(h_n)}=h_n-\frac{0.5\pi-1.24-\arcsin(h_n)-h_n\sqrt{(1-h_n^2)}}{-2\sqrt{1-h_n^2}}$$

$$h_{n+1}=\frac{0.25\pi-0.62}{\sqrt{1-h_n^2}}-\frac{\arcsin(h_n)}{2\sqrt{1-h_n^2}}+0.5h_n$$

چون $0<h<1$ است، نقطه شروع نیز باید در همین فاصله باشد که آن را برابر 0.5 فرض می‌کنیم. از طرفی باید خطا کمتر از 10^{-2} باشد، پس محاسبات میانی را با ۳ رقم اعشار انجام می‌دهیم.

$$h_0=0.5\rightarrow h_1=0.139\rightarrow h_2=0.166\rightarrow h_3=0.166$$

۷- حالت اول : تعیین مرتبه ریشه با استفاده از روش نیوتن- رافسون معمولی :

$$f(x)=x^2-2xe^{-x}+e^{-2x}=0\quad\text{on}\quad[0,1]\rightarrow f'(x)=2x-2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-2x}$$

چون $0<x<1$ است، نقطه شروع نیز باید در همین فاصله باشد که آن را برابر 0.2 فرض می‌کنیم.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\qquad x_0=0.2\rightarrow x_1=0.3701\rightarrow x_2=0.4649$$

$$|e_1|=0.1701\ ,\ |e_2|=0.0948\Rightarrow\frac{|e_2|}{|e_1|}=0.5573\simeq\frac{m-1}{m}\rightarrow m\simeq 2.25$$

$$x_3=0.5150\rightarrow|e_3|=0.0501\Rightarrow\frac{|e_3|}{|e_2|}=0.5285\simeq\frac{m-1}{m}\rightarrow m\simeq 2.12$$

با محاسبه تقریب اول m نمی‌توان در مورد آن قضاوت کرد ولی با محاسبه دومین m مشخص می‌شود که مرتبه همگرایی ۲ است. اگر نسبت سوم نیز محاسبه شود، دلیل قطعی این موضوع مشحص می‌شود.

$$x_{n+1}=x_n-2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\qquad x_0=0.2\rightarrow x_1=0.5401992032\rightarrow x_2=0.5670108503$$

$$x_3=0.5671432872\rightarrow x_4=0.5671432802\rightarrow x_5=0.5671432891\rightarrow x_6=0.5671433064$$

$$x_7=0.5671432909\rightarrow x_8=0.5671431987\rightarrow x_9=0.5671432906\rightarrow x_{10}=0.567143253$$

$$x_{11}=0.567143291$$

جواب نهایتا بین دو مقدار آخر نوسان می‌کند و الگوریتم ناپایدار است. مناسب است برای اینکه این ناپایداری دیرتر مشاهده شود و جواب به دقت ۸ رقم اعشار برسد، بایستی محاسبات میانی را با بیش از ۹ رقم اعشار انجام داد که در این صورت به جواب نهایی با دقت ۸ رقم اعشار 0.56714329 می‌رسیم.

حالت دوم :

$$g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}\rightarrow g(x)=\frac{x^2-2xe^{-x}+e^{-2x}}{2x-2e^{-x}+2xe^{-x}-2e^{-2x}}=\frac{x-e^{-x}}{2(1+e^{-x})}\quad,\quad x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

$$g'(x)=\frac{2(1+e^{-x})^2+2e^{-x}(x-e^{-x})}{4(1+e^{-x})^2}=\frac{1+2e^{-x}+xe^{-x}}{2(1+e^{-x})^2}\rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{(x_n-e^{-x_n})(1+e^{-x_n})}{1+2e^{-x_n}+x_ne^{-x_n}}$$

$$x_0=0.2\rightarrow x_1=0.601721253\rightarrow x_2=0.567352472\rightarrow x_3=0.567143298$$

$$x_4=0.567143290\rightarrow x_5=0.567143290$$