جواب تمرین سری دوم

۱- لاگرانژ :

$$L_i(x)=\prod_{j=۰,\, j\neq i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad , \quad i=۰,۱,...,n \rightarrow L_۰(x)=\prod_{j=۰,\, j\neq ۰}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_۰-x_j)}=\frac{(x-۲)}{(۱-۲)}\frac{(x-۴)}{(۱-۴)}\frac{(x-۶)}{(۱-۶)}$$

$$L_۰(x)=\frac{-۱}{۱۵}(x-۲)(x-۴)(x-۶)\,,\ L_۱(x)=\prod_{j=۰,\, j\neq ۱}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_۱-x_j)}=\frac{(x-۱)}{(۲-۱)}\frac{(x-۴)}{(۲-۴)}\frac{(x-۶)}{(۲-۶)}=\frac{۱}{۸}(x-۱)(x-۴)(x-۶)$$

$$L_۲(x)=\prod_{j=۰,\, j\neq ۲}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_۲-x_j)}=\frac{(x-۱)}{(۴-۱)}\frac{(x-۲)}{(۴-۲)}\frac{(x-۶)}{(۴-۶)}=\frac{-۱}{۱۲}(x-۱)(x-۲)(x-۶)$$

$$L_۳(x)=\prod_{j=۰,\, j\neq ۳}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_۳-x_j)}=\frac{(x-۱)}{(۶-۱)}\frac{(x-۲)}{(۶-۲)}\frac{(x-۴)}{(۶-۴)}=\frac{۱}{۴۰}(x-۱)(x-۲)(x-۴)$$

$$P(x)=\sum_{i=۰}^{n}L_i(x)y_i \rightarrow P(x)=-L_۰(x)-L_۱(x)+۲L_۲(x)+L_۳(x)=-۰/۲x^۳+۱/۹x^۲-۴/۳x+۱/۶$$

x	1	2	4	6
y	-1	-1	2	1

کسری :

$$(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)\rightarrow R_{۱۲}=R_۲+\frac{R_۲-R_۱}{\frac{x-x_۱}{x-x_۲}\left(۱-\frac{R_۲-R_۱}{R_۲}\right)-۱}=-۱+\frac{-۱-(-۱)}{\frac{x-۱}{x-۲}\left(۱-\frac{-۱-(-۱)}{-۱}\right)-۱}=-۱$$

$$(x_۲,y_۲),(x_۳,y_۳)\rightarrow R_{۲۳}=R_۳+\frac{R_۳-R_۲}{\frac{x-x_۲}{x-x_۳}\left(۱-\frac{R_۳-R_۲}{R_۳}\right)-۱}=۲+\frac{۲-(-۱)}{\frac{x-۲}{x-۴}\left(۱-\frac{۲-(-۱)}{۲}\right)-۱}=\frac{۴}{۳x-۱۰}$$

$$(x_۳,y_۳),(x_۴,y_۴)\rightarrow R_{۳۴}=R_۴+\frac{R_۴-R_۳}{\frac{x-x_۳}{x-x_۴}\left(۱-\frac{R_۴-R_۳}{R_۴}\right)-۱}=۱+\frac{۱-۲}{\frac{x-۴}{x-۶}\left(۱-\frac{۱-۲}{۱}\right)-۱}=\frac{۴}{x-۲}$$

$$(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲),(x_۳,y_۳)\rightarrow R_{۱۲۳}=R_{۲۳}+\frac{R_{۲۳}-R_{۱۲}}{\frac{x-x_۱}{x-x_۳}\left(۱-\frac{R_{۲۳}-R_{۱۲}}{R_{۲۳}-R_۲}\right)-۱}$$

$$R_{۱۲۳}=\frac{۴}{۳x-۱۰}+\frac{\frac{۴}{۳x-۱۰}-(-۱)}{\frac{x-۱}{x-۴}\left(۱-\frac{\frac{۴}{۳x-۱۰}-(-۱)}{\frac{۴}{۳x-۱۰}-(-۱)}\right)-۱}=-۱$$

$$(x_۲,y_۲),(x_۳,y_۳),(x_۴,y_۴)\rightarrow R_{۲۳۴}=R_{۳۴}+\frac{R_{۳۴}-R_{۲۳}}{\frac{x-x_۲}{x-x_۴}\left(۱-\frac{R_{۳۴}-R_{۲۳}}{R_{۳۴}-R_۳}\right)-۱}$$

$$R_{234}=\frac{4}{x-2}+\frac{\frac{4}{x-2}-\frac{4}{3x-10}}{\frac{x-2}{x-6}\left(1-\frac{\frac{4}{x-2}-\frac{4}{3x-10}}{\frac{4}{x-2}-2}\right)-1}=\frac{0.5x}{x-3}$$

$$R_{1234}=R_{234}+\frac{R_{234}-R_{123}}{\frac{x-x_1}{x-x_4}\left(1-\frac{R_{234}-R_{123}}{R_{234}-R_{23}}\right)-1}$$

برای این مسئله نمی‌توان درونیابی کسری نمود. زیرا در عبارت R_{123} به ازای نقطه سوم، یعنی $x=4$ ، در مخرج بدست آمده عبارت $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود که قابل رفع نیست. جواب نهایی R_{123} هم نشان می‌دهد که نقطه سوم در آن صدق نمی‌کند. فقط برای اطلاع دانشجویان حل آن را ادامه داده‌ام.

-۲

$$\text{(a)}\ y_i'=\frac{y_i-y_{i-1}}{h}=\frac{4-2.8}{10}=0.12\ \text{millions}/\text{year}$$

$$\text{(b)}\ y_i'=\frac{3y_i-4y_{i-1}+y_{i-2}}{2h}=\frac{3(4)-4(2.8)+2.1}{20}=0.145\ \text{millions}/\text{year}$$

$$\text{(c)}\ y_i'=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}=0.145\rightarrow\frac{y_{i+1}-2.8}{20}=0.145\Rightarrow y_{i+1}=y(2020)=5.7\ \text{millions}$$

خطا در قسمت (a) و (b) به ترتیب متناسب با h و مربع h است. زیرا :

$$y_{i-1}=y_i-\frac{h}{1!}y_i'+\frac{h^2}{2!}y_i''-+\ldots\rightarrow\frac{y_i-y_{i-1}}{h}-y_i'=-\frac{h}{2!}y_i''+-\ldots=O(h)$$

$$y_{i-2}=y_i-\frac{2h}{1!}y_i'+\frac{4h^2}{2!}y_i''-+\ldots\rightarrow\frac{3y_i-4y_{i-1}+y_{i-2}}{2h}-y_i'=\frac{-2h^2}{3!}y_i'''+-\ldots=O(h^2)$$

$$\text{(d)}\ y=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}u+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}u(u-1)+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)\ ,\ u=\frac{x-x_0}{h}=\frac{2020-1960}{10}=6$$

$$y=1.1+\frac{0.3}{1!}(6)+\frac{0.2}{2!}(6)(5)+\frac{-0.5}{3!}(6)(5)(4)+\frac{1.3}{4!}(6)(5)(4)(3)+\frac{-2.1}{5!}(6)(5)(4)(3)(2)=11.8$$

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	1960	1.1	0.3	0.2	-0.5	1.3	-2.1
1	1970	1.4	0.5	-0.3	0.8	-0.8	
2	1980	1.9	0.2	0.5	0		
3	1990	2.1	0.7	0.5			
4	2000	2.8	1.2				
5	2010	4					

-۳

$$\begin{cases}x'=x-yt=f_1(t,x,y)\\ y'=t+y=f_2(t,x,y)\end{cases},\ \begin{cases}x(0)=1\\ y(0)=1\end{cases},\ t\in[0,1.2]\ ,\ h=0.4$$

$$(a)\quad \begin{cases} x_{i+۱} = x_i + \dfrac{h}{۲}[f_۱(t_i, x_i, y_i) + f_۱(t_{i+۱}, x_i + hf_۱(t_i, x_i, y_i), y_i + hf_۲(t_i, x_i, y_i))] \\ y_{i+۱} = y_i + \dfrac{h}{۲}[f_۲(t_i, x_i, y_i) + f_۲(t_{i+۱}, x_i + hf_۱(t_i, x_i, y_i), y_i + hf_۲(t_i, x_i, y_i))] \end{cases} \quad , \ i = ۰, ۱, ۲, ۳$$

$i = ۰ \ : \ f_۱(t_۰, x_۰, y_۰) = x_۰ - y_۰ t_۰ = ۱ - ۱ \times ۰ = ۱ \ , \quad f_۲(t_۰, x_۰, y_۰) = t_۰ + y_۰ = ۰ + ۱ = ۱$

$f_۱(t_۱, x_۰ + hf_۱(t_۰, x_۰, y_۰), y_۰ + hf_۲(t_۰, x_۰, y_۰)) = f_۱(۰/۴, ۱ + ۰/۴ \times ۱, ۱ + ۰/۴ \times ۱) =$

$f_۱(۰/۴, ۱/۴.۱/۴) = ۱/۴ - ۱/۴ \times ۰/۴ = ۰/۸۴$

$f_۲(t_۱, x_۰ + hf_۱(t_۰, x_۰, y_۰), y_۰ + hf_۲(t_۰, x_۰, y_۰)) = f_۲(۰/۴, ۱ + ۰/۴ \times ۱, ۱ + ۰/۴ \times ۱) =$

$f_۲(۰/۴, ۱/۴.۱/۴) = ۰/۴ + ۱/۴ = ۱/۸$

$x_۱ = x(۰/۴) = x_۰ + ۰/۲[۱ + ۰/۸۴] = ۱/۳۶۸ \quad , \quad y_۱ = y(۰/۴) = y_۰ + ۰/۲[۱ + ۱/۸] = ۱/۵۶$

$i = ۱ \ : \ f_۱(t_۱, x_۱, y_۱) = x_۱ - y_۱ t_۱ = ۱/۳۶۸ - ۱/۵۶ \times ۰/۴ = ۰/۷۴۴ \ , \ f_۲(t_۱, x_۱, y_۱) = t_۱ + y_۱ = ۰/۴ + ۱/۵۶ = ۱/۹۶$

$f_۱(t_۲, x_۱ + hf_۱(t_۱, x_۱, y_۱), y_۱ + hf_۲(t_۱, x_۱, y_۱)) = f_۱(۰/۸, ۱/۳۶۸ + ۰/۴ \times ۰/۷۴۴ \ , ۱/۵۶ + ۰/۴ \times ۱/۹۶) =$

$f_۱(۰/۸, ۱/۶۶۵۶.۲/۳۴۴) = ۱/۶۶۵۶ - ۲/۳۴۴ \times ۰/۸ = -۰/۲۰۹۶$

$f_۲(t_۲, x_۱ + hf_۱(t_۱, x_۱, y_۱), y_۱ + hf_۲(t_۱, x_۱, y_۱)) = f_۲(۰/۸, ۱/۳۶۸ + ۰/۴ \times ۰/۷۴۴ \ , ۱/۵۶ + ۰/۴ \times ۱/۹۶) =$

$f_۲(۰/۸, ۱/۶۶۵۶, ۲/۳۴۴) = ۰/۸ + ۲/۳۴۴ = ۳/۱۴۴$

$x_۲ = x(۰/۸) = x_۱ + ۰/۲[-۰/۲۰۹۶ + ۰/۷۴۴] = ۱/۴۷۴۸۸$

$y_۲ = y(۰/۸) = y_۱ + ۰/۲[۱/۹۶ + ۳/۱۴۴] = ۲/۵۸۰۸$

$i = ۲ \ : \ f_۱(t_۲, x_۲, y_۲) = x_۲ - y_۲ t_۲ = ۱/۴۷۴۸۸ - ۲/۵۸۰۸ \times ۰/۸ = -۰/۵۸۹۷۶$

$f_۲(t_۲, x_۲, y_۲) = t_۲ + y_۲ = ۰/۸ + ۲/۵۸۰۸ = ۳/۳۸۰۸$

$f_۱(t_۳, x_۲ + hf_۱(t_۲, x_۲, y_۲), y_۲ + hf_۲(t_۲, x_۲, y_۲)) =$

$f_۱(۱/۲, ۱/۴۷۴۸۸ + ۰/۴ \times (-۰/۵۸۹۷۶) \ , ۲/۵۸۰۸ + ۰/۴ \times ۳/۳۸۰۸) = f_۱(۱/۲, ۱/۲۳۸۹۷۶, ۳/۹۳۳۱۲)$

$= ۱/۲۳۸۹۷۶ - ۳/۹۳۳۱۲ \times ۱/۲ = -۳/۴۸۰۷۶۸$

$f_۲(t_۳, x_۲ + hf_۱(t_۲, x_۲, y_۲), y_۲ + hf_۲(t_۲, x_۲, y_۲)) =$

$f_۲(۱/۲, ۱/۴۷۴۸۸ + ۰/۴ \times (-۰/۵۸۹۷۶) \ , ۲/۵۸۰۸ + ۰/۴ \times ۳/۳۸۰۸) = f_۲(۱/۲, ۱/۲۳۸۹۷۶, ۳/۹۳۳۱۲)$

$= ۱/۲ + ۳/۹۳۳۱۲ = ۵/۱۳۳۱۲$

$x_۳ = x(۱/۲) = x_۲ + ۰/۲[-۰/۵۸۹۷۶ - ۳/۴۸۰۷۶۸] = ۰/۶۶۰۷۷۴۴$

$y_۳ = y(۱/۲) = y_۲ + ۰/۲[۳/۳۸۰۸ + ۵/۱۳۳۱۲] = ۴/۲۸۳۵۸۴$

مقادیر واقعی و خطا :

$$\begin{cases} x(۰/۴) = ۱/۳۶۸۶۰۶۸۳۸۹۴ \\ y(۰/۴) = ۱/۵۸۳۶۴۹۳۹۵۲۸ \end{cases} \to \begin{cases} e_x(۰/۴) \simeq ۰/۰۰۰۶ \\ e_y(۰/۴) \simeq ۰/۰۲ \end{cases} , \ \begin{cases} x(۰/۸) = ۱/۴۳۷۸۱۷۵۱۹۷۳ \\ y(۰/۸) = ۲/۶۵۱۰۸۱۸۵۶۹۸ \end{cases} \to \begin{cases} e_x(۰/۸) \simeq -۰/۰۳۷ \\ e_y(۰/۸) \simeq ۰/۰۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(۱/۲) = ۰/۴۵۹۴۹۹۳۲۲۲۲۱ \\ y(۱/۲) = ۴/۴۴۰۲۳۳۸۴۵۴۷ \end{cases} \to \begin{cases} e_x(۱/۲) \simeq -۰/۲ \\ e_y(۱/۲) \simeq ۰/۱۶ \end{cases}$$

خطا در این روش در هر گام متناسب با $h^۳ = ۰/۴^۳ = ۰/۰۶۴$ است که با در نظر گرفتن یک ضریب ۳ ، بدبینانه در حدود ۰/۱۹ خواهد بود. بنابراین بدبینانه باید انتظار داشته باشیم که جواب حتی یک رقم اعشار دقت نداشته باشد. یعنی کافی است محاسبات را با یک رقم اعشار انجام دهیم. در محاسبات فوق این موضوع در نظر گرفته نشد. زیرا تمام اعداد نمایش داده شده تعداد ارقام اعشار آنها محدود بوده است و همان است که نمایش داده شده است. در ادامه این روش، خطا متناسب با $h^۲ = ۰/۴^۲ = ۰/۱۶$ خواهد بود که با در نظر گرفتن یک ضریب ۳ ، بدبینانه در حدود ۰/۴۸ می‌باشد.

$$
(b)\begin{cases}
K_{۱}=hf_{۱}(t_i,x_i,y_i)\ ,\ L_{۱}=hf_{۲}(t_i,x_i,y_i)\\
K_{۲}=hf_{۱}(t_i+\frac{۱}{۲}h\,,x_i+\frac{۱}{۲}K_{۱}\,,y_i+\frac{۱}{۲}L_{۱})\ ,\ L_{۲}=hf_{۲}(t_i+\frac{۱}{۲}h\,,x_i+\frac{۱}{۲}K_{۱}\,,y_i+\frac{۱}{۲}L_{۱})\\
K_{۳}=hf_{۱}(t_i+\frac{۱}{۲}h\,,x_i+\frac{۱}{۲}K_{۲}\,,y_i+\frac{۱}{۲}L_{۲})\ ,\ L_{۳}=hf_{۲}(t_i+\frac{۱}{۲}h\,,x_i+\frac{۱}{۲}K_{۲}\,,y_i+\frac{۱}{۲}L_{۲})\\
K_{۴}=hf_{۱}(t_i+h\,,x_i+K_{۳}\,,y_i+L_{۳})\ ,\ L_{۴}=hf_{۲}(t_i+h\,,x_i+K_{۳}\,,y_i+L_{۳})\\
y_{i+۱}=y_i+\frac{۱}{۶}[K_{۱}+۲K_{۲}+۲K_{۳}+K_{۴}]\ ,\ p_{i+۱}=p_i+\frac{۱}{۶}[L_{۱}+۲L_{۲}+۲L_{۳}+L_{۴}]
\end{cases}
$$

$$i=۰:\ K_{۱}=hf_{۱}(t_{۰},x_{۰},y_{۰})=۰/۴f_{۱}(۰,۱,۱)=۰/۴(۱-۰\times۱)=۰/۴$$

$$L_{۱}=hf_{۲}(t_{۰},x_{۰},y_{۰})=۰/۴f_{۲}(۰,۱,۱)=۰/۴(۰+۱)=۰/۴$$

$$K_{۲}=۰/۴f_{۱}(t_{۰}+\frac{۱}{۲}h\,,x_{۰}+\frac{۱}{۲}K_{۱}\,,y_{۰}+\frac{۱}{۲}L_{۱})=۰/۴f_{۱}(۰+۰/۲,۱+۰/۵(۰/۴),۱+۰/۵(۰/۴))$$
$$=۰/۴f_{۱}(۰/۲,۱/۲,۱/۲)=۰/۴(۱/۲-۱/۲\times۰/۲)=۰/۳۸۴$$

$$L_{۲}=۰/۴f_{۲}(t_{۰}+\frac{۱}{۲}h\,,x_{۰}+\frac{۱}{۲}K_{۱}\,,y_{۰}+\frac{۱}{۲}L_{۱})=۰/۴f_{۲}(۰+۰/۲,۱+۰/۵(۰/۴),۱+۰/۵(۰/۴))$$
$$=۰/۴f_{۲}(۰/۲,۱/۲,۱/۲)=۰/۴(۰/۲+۱/۲)=۰/۵۶$$

$$K_{۳}=hf_{۱}(t_{۰}+\frac{۱}{۲}h\,,x_{۰}+\frac{۱}{۲}K_{۲}\,,y_{۰}+\frac{۱}{۲}L_{۲})=۰/۴f_{۱}(۰+۰/۲,۱+۰/۵(۰/۳۸۴),۱+۰/۵(۰/۵۶))$$
$$=۰/۴f_{۱}(۰/۲,۱/۱۹۲,۱/۲۸)=۰/۴(۱/۱۹۲-۱/۲۸\times۰/۲)=۰/۳۷۴۴$$

$$L_{۳}=hf_{۲}(t_{۰}+\frac{۱}{۲}h\,,x_{۰}+\frac{۱}{۲}K_{۲}\,,y_{۰}+\frac{۱}{۲}L_{۲})=۰/۴f_{۲}(۰+۰/۲,۱+۰/۵(۰/۳۸۴),۱+۰/۵(۰/۵۶))$$
$$=۰/۴f_{۲}(۰/۲,۱/۱۹۲,۱/۲۸)=۰/۴(۰/۲+۱/۲۸)=۰/۵۹۲$$

$$K_{۴}=hf_{۱}(t_{۰}+h\,,x_{۰}+K_{۳}\,,y_{۰}+L_{۳})=۰/۴f_{۱}(۰+۰/۴,۱+۰/۳۷۴۴,۱+۰/۵۹۲)$$
$$=۰/۴f_{۱}(۰/۴,۱/۳۷۴۴,۱/۵۹۲)=۰/۴(۱/۳۷۴۴-۱/۵۹۲\times۰/۴)=۰/۲۹۵۰۴$$

$$L_{۴}=hf_{۲}(t_{۰}+h\,,x_{۰}+K_{۳}\,,y_{۰}+L_{۳})=۰/۴f_{۲}(۰+۰/۴,۱+۰/۳۷۴۴,۱+۰/۵۹۲)$$
$$=۰/۴f_{۲}(۰/۴,۱/۳۷۴۴,۱/۵۹۲)=۰/۴(۰/۴+۱/۵۹۲)=۰/۷۹۶۸$$

$$x_{۱}=x(۰/۴)=x_{۰}+\frac{۱}{۶}[K_{۱}+۲K_{۲}+۲K_{۳}+K_{۴}]=۱+\frac{۱}{۶}[۰/۴+۲(۰/۳۸۴)+۲(۰/۳۷۴۴)+۰/۲۹۵۰۴]$$
$$=۱/۳۶۸۶۴$$

$$y_{۱}=y(۰/۴)=y_{۰}+\frac{۱}{۶}[L_{۱}+۲L_{۲}+۲L_{۳}+L_{۴}]=۱+\frac{۱}{۶}[۰/۴+۲(۰/۵۶)+۲(۰/۵۹۲)+۰/۷۹۶۸]$$
$$=۱/۵۸۳۴۷$$

$$i=۱:\ K_۱ = hf_۱(t_۱,x_۱,y_۱) = ۰/۴f_۱(۰/۴,۱/۳۶۸۶۴,۱/۵۸۳۴۷) = ۰/۴(۱/۳۶۸۶۴ - ۰/۴\times ۱/۵۸۳۴۷) = ۰/۲۹۴۱۰$$

$$L_۱ = hf_۲(t_۱,x_۱,y_۱) = ۰/۴f_۲(۰/۴,۱/۳۶۸۶۴,۱/۵۸۳۴۷) = ۰/۴(۰/۴+۱/۵۸۳۴۷) = ۰/۷۹۳۳۹$$

$$K_۲ = ۰/۴f_۱(t_۱+\frac{۱}{۲}h\,, x_۱+\frac{۱}{۲}K_۱\,, y_۱+\frac{۱}{۲}L_۱)$$

$$= ۰/۴f_۱(۰/۴+۰/۲,۱/۳۶۸۶۴+۰/۵(۰/۲۹۴۱۰),۱/۵۸۳۴۷+۰/۵(۰/۷۹۳۳۹))$$

$$= ۰/۴f_۱(۰/۶,۱/۵۱۵۶۹,۱/۹۸۰۱۷) = ۰/۴(۱/۵۱۵۶۹ - ۱/۹۸۰۱۷\times ۰/۶) = ۰/۱۳۱۰۴$$

$$L_۲ = ۰/۴f_۲(t_۱+\frac{۱}{۲}h\,, x_۱+\frac{۱}{۲}K_۱\,, y_۱+\frac{۱}{۲}L_۱) =$$

$$= ۰/۴f_۲(۰/۴+۰/۲,۱/۳۶۸۶۴+۰/۵(۰/۲۹۴۱۰),۱/۵۸۳۴۷+۰/۵(۰/۷۹۳۳۹))$$

$$= ۰/۴f_۲(۰/۶,۱/۵۱۵۶۹,۱/۹۸۰۱۷) = ۰/۴(۰/۶+۱/۹۸۰۱۷) = ۱/۰۳۲۰۷$$

$$K_۳ = hf_۱(t_۱+\frac{۱}{۲}h\,, x_۱+\frac{۱}{۲}K_۲\,, y_۱+\frac{۱}{۲}L_۲)$$

$$= ۰/۴f_۱(۰/۴+۰/۲,۱/۳۶۸۶۴+۰/۵(۰/۱۳۱۰۴),۱/۵۸۳۴۷+۰/۵(۱/۰۳۲۰۷))$$

$$= ۰/۴f_۱(۰/۶,۱/۴۳۴۱۶,۲/۰۹۹۵۱) = ۰/۴(۱/۴۳۴۱۶ - ۲/۰۹۹۵۱\times ۰/۶) = ۰/۰۶۹۷۸$$

$$L_۳ = hf_۲(t_۱+\frac{۱}{۲}h\,, x_۱+\frac{۱}{۲}K_۲\,, y_۱+\frac{۱}{۲}L_۲)$$

$$= ۰/۴f_۲(۰/۴+۰/۲,۱/۳۶۸۶۴+۰/۵(۰/۱۳۱۰۴),۱/۵۸۳۴۷+۰/۵(۱/۰۳۲۰۷))$$

$$= ۰/۴f_۲(۰/۶,۱/۴۳۴۱۶,۲/۰۹۹۵۱) = ۰/۴(۰/۶+۲/۰۹۹۵۱) = ۱/۰۷۹۸۰$$

$$K_۴ = hf_۱(t_۱+h\,, x_۱+K_۳\,, y_۱+L_۳) = ۰/۴f_۱(۰/۴+۰/۴,۱/۳۶۸۶۴+۰/۰۶۹۷۸,۱/۵۸۳۴۷+۱/۰۷۹۸۰)$$

$$= ۰/۴f_۱(۰/۸,۱/۴۳۸۴۲,۲/۶۶۳۲۷) = ۰/۴(۱/۴۳۸۴۲ - ۲/۶۶۳۲۷\times ۰/۸) = -۰/۲۷۶۸۸$$

$$L_۴ = hf_۲(t_۱+h\,, x_۱+K_۳\,, y_۱+L_۳) = ۰/۴f_۲(۰/۴+۰/۴,۱/۳۶۸۶۴+۰/۰۶۹۷۸,۱/۵۸۳۴۷+۱/۰۷۹۸۰)$$

$$= ۰/۴f_۲(۰/۸,۱/۴۳۸۴۲,۲/۶۶۳۲۷) = ۰/۴(۰/۸+۲/۶۶۳۲۷) = ۱/۳۸۵۳۱$$

$$x_۲ = x(۰/۸) = x_۱ + \frac{۱}{۶}[K_۱+۲K_۲+۲K_۳+K_۴]$$

$$= ۱/۳۶۸۶۴ + \frac{۱}{۶}[۰/۲۹۴۱۰ + ۲(۰/۱۳۱۰۴) + ۲(۰/۰۶۹۷۸) - ۰/۲۷۶۸۸] = ۱/۴۳۸۴۵$$

$$y_۲ = y(۰/۸) = y_۱ + \frac{۱}{۶}[L_۱+۲L_۲+۲L_۳+L_۴]$$

$$= ۱/۵۸۳۴۷ + \frac{۱}{۶}[۰/۷۹۳۳۹ + ۲(۱/۰۳۲۰۷) + ۲(۱/۰۷۹۱۸) + ۱/۳۸۵۳۱] = ۲/۶۵۰۳۴$$

$$i=۲:\ K_۱ = hf_۱(t_۲,x_۲,y_۲) = ۰/۴f_۱(۰/۸,۱/۴۳۸۴۵,۲/۶۵۰۳۴) = ۰/۴(۱/۴۳۸۴۵ - ۰/۸\times ۲/۶۵۰۳۴) = -۰/۶۸۱۸۲$$

$$L_۱ = hf_۲(t_۲,x_۲,y_۲) = ۰/۴f_۲(۰/۸,۱/۴۳۸۴۵,۲/۶۵۰۳۴) = ۰/۴(۰/۸+۲/۶۵۰۳۴) = ۱/۳۸۰۱۴$$

$$K_۲ = ۰/۴f_۱(t_۲+\frac{۱}{۲}h\,, x_۲+\frac{۱}{۲}K_۱\,, y_۲+\frac{۱}{۲}L_۱)$$

$$= ۰/۴f_۱(۰/۸+۰/۲,۱/۴۳۸۴۵+۰/۵(-۰/۶۸۱۸۲),۲/۶۵۰۳۴+۰/۵(۱/۳۸۰۱۴))$$

$$= ۰/۴f_۱(۱,۱/۰۹۷۵۴,۳/۳۴۰۴۱) = ۰/۴(۱/۰۹۷۵۴ - ۳/۳۴۰۴۱\times ۱) = -۰/۸۹۷۱۵$$

$$L_{۲}=۰/۴f_{۲}(t_{۲}+\frac{۱}{۲}h\,,x_{۲}+\frac{۱}{۲}K_{۱}\,,y_{۲}+\frac{۱}{۲}L_{۱})=$$
$$=۰/۴f_{۲}(۰/۸+۰/۲,۱/۴۳۸۴۵+۰/۵(-۰/۶۸۱۸۲),۲/۶۵۰۳۴+۰/۵(۱/۳۸۰۱۴))$$
$$=۰/۴f_{۲}(۱,۱/۰۹۷۵۴,۳/۳۴۰۴۱)=۰/۴(۱+۳/۳۴۰۴۱)=۱/۷۳۶۱۶$$

$$K_{۳}=hf_{۱}(t_{۲}+\frac{۱}{۲}h\,,x_{۲}+\frac{۱}{۲}K_{۲}\,,y_{۲}+\frac{۱}{۲}L_{۲})$$
$$=۰/۴f_{۱}(۰/۸+۰/۲,۱/۴۳۸۴۵+۰/۵(-۰/۸۹۷۱۵),۲/۶۵۰۳۴+۰/۵(۱/۷۳۶۱۶))$$
$$=۰/۴f_{۱}(۱,۰/۹۸۹۸۸,۳/۵۱۸۴۲)=۰/۴(۰/۹۸۹۸۸-۳/۵۱۸۴۲\times۱)=-۱/۰۱۱۴۲$$

$$L_{۳}=hf_{۲}(t_{۲}+\frac{۱}{۲}h\,,x_{۲}+\frac{۱}{۲}K_{۲}\,,y_{۲}+\frac{۱}{۲}L_{۲})$$
$$=۰/۴f_{۲}(۰/۸+۰/۲,۱/۴۳۸۴۵+۰/۵(-۰/۸۹۷۱۵),۲/۶۵۰۳۴+۰/۵(۱/۷۳۶۱۶))$$
$$=۰/۴f_{۲}(۱,۰/۹۸۹۸۸,۳/۵۱۸۴۲)=۰/۴(۱+۳/۵۱۸۴۲)=۱/۸۰۷۳۷$$
$$K_{۴}=hf_{۱}(t_{۲}+h\,,x_{۲}+K_{۳}\,,y_{۲}+L_{۳})=۰/۴f_{۱}(۰/۸+۰/۴,۱/۴۳۸۴۵-۱/۰۱۱۴۲,۲/۶۵۰۳۴+۱/۸۰۷۳۷)$$
$$=۰/۴f_{۱}(۱/۲,۰/۴۲۷۰۳,۴/۴۵۷۷۱)=۰/۴(۰/۴۲۷۰۳-۴/۴۵۷۷۱\times۱/۲)=-۱/۹۶۸۸۹$$
$$L_{۴}=hf_{۲}(t_{۲}+h\,,x_{۲}+K_{۳}\,,y_{۲}+L_{۳})=۰/۴f_{۲}(۰/۸+۰/۴,۱/۴۳۸۴۵-۱/۰۱۱۴۲,۲/۶۵۰۳۴+۱/۸۰۷۳۷)$$
$$=۰/۴f_{۲}(۱/۲,۰/۴۲۷۰۳,۴/۴۵۷۷۱)=۰/۴(۱/۲+۴/۴۵۷۷۱)=۲/۲۶۳۰۸$$

$$x_{۳}=x(۱/۲)=x_{۲}+\frac{۱}{۶}[K_{۱}+۲K_{۲}+۲K_{۳}+K_{۴}]$$

$$=۱/۴۳۸۴۵+\frac{۱}{۶}[-۰/۶۸۱۸۲+۲(-۰/۸۹۷۱۵)+۲(-۱/۰۱۱۴۲)-۱/۹۶۸۸۹]=۰/۳۶۰۴۸$$

$$y_{۳}=y(۱/۲)=y_{۲}+\frac{۱}{۶}[L_{۱}+۲L_{۲}+۲L_{۳}+L_{۴}]$$

$$=۲/۶۵۰۳۴+\frac{۱}{۶}[۱/۳۸۰۱۴+۲(۱/۷۳۶۱۶)+۲(۱/۸۰۷۳۷)+۲/۲۶۳۰۸]=۴/۴۳۸۷۲$$

خطا :

$$\begin{cases}e_x(۰/۴)\simeq۰/۰۰۰۰۴\\ e_y(۰/۴)\simeq-۰/۰۰۰۲\end{cases},\begin{cases}e_x(۰/۸)\simeq۰/۰۰۰۶\\ e_y(۰/۸)\simeq-۰/۰۰۰۷\end{cases},\begin{cases}e_x(۱/۲)\simeq-۰/۰۹۹\\ e_y(۱/۲)\simeq-۰/۰۰۱۵\end{cases}$$

خطا در این روش در هر گام متناسب با $h^{۵}=۰/۴^{۵}=۰/۰۱۰۲۴$ است که با در نظر گرفتن یک ضریب ۳ ، بدبینانه در حدود ۰/۰۳ خواهد بود. بنابراین بدبینانه باید انتظار داشته باشیم که جواب فقط باید یک رقم اعشار دقت داشته باشد. یعنی کافی است محاسبات را با دو رقم اعشار انجام دهیم. در محاسبات فوق این موضوع در نظر گرفته نشد. بهتر بوئ که این موضوع در نظر گرفته می‌شد. چون جواب واقعی را داریم و در گام اول در مورد متغیر x ، ۴ رقم اعشار دقت داریم، محاسبات را با ۵ رقم اعشار انجام داده‌ایم. در ادامه این روش، خطا متناسب با $h^{۲}=۰/۴^{۲}=۰/۰۲۵۶$ خواهد بود که با در نظر گرفتن یک ضریب ۳ ، بدبینانه در حدود ۰/۰۸ می‌باشد.

-۴

$$y^{(۱)}=y_{۰}+\int_{x_{۰}}^{x}f(x,y_{۰})dx=\int_{۰}^{x}-x^{2}dx=\frac{-x^{۳}}{۳}$$
$$y^{(۲)}=\int_{۰}^{x}\frac{x^{۲}}{\frac{x^{۶}}{۹}-۱}dx\ \ :\ \ \frac{x^{۳}}{۳}=u\rightarrow y^{(۲)}=\int\frac{du}{u^{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}\int\frac{du}{u-۱}-\frac{۱}{۲}\int\frac{du}{u+۱}=\frac{۱}{۲}\ln(u-۱)-\frac{۱}{۲}\ln(u+۱)=\frac{۱}{۲}\ln(\frac{u-۱}{u+۱})$$

$$y^{(۲)}=\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{\frac{x^{۳}}{۳}-۱}{\frac{x^{۳}}{۳}+۱}\right)-\frac{۱}{۲}\ln(-۱)=\frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۳-x^{۳}}{۳+x^{۳}}\right)=\frac{-x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۹}}{۸۱}-\frac{x^{۱۵}}{۱۲۱۵}-\ldots$$

برای اینکه جواب مرحله اول تا سه رقم اعشار دقت داشته باشیم ، بایستی : $\frac{x^{۹}}{۸۱}<۰/۰۰۵\rightarrow x<۰/۷$

۵- $a)S=۲\pi\int_{۰}^{۶}x\sqrt{۱+[f'(x)]^{۲}}dx=۲\pi\int_{۰}^{۶}g(x)dx\ :\ g(x)=x\sqrt{۱+[f'(x)]^{۲}}=x\sqrt{۱+(-۰/۱x^{۳})^{۲}}=x\sqrt{۱+۰/۰۱x^{۶}}$

$$M_{۲}=\max|g''(x)|\ :\ ۰\le x\le ۶\qquad g'(x)=\sqrt{۱+۰/۰۱x^{۶}}+\frac{۰/۰۶x^{۵}}{۲\sqrt{۱+۰/۰۱x^{۶}}}x=\frac{۱+۰/۰۴x^{۶}}{\sqrt{۱+۰/۰۱x^{۶}}}$$

$$g''(x)=\frac{۰/۲۴x^{۵}\sqrt{۱+۰/۰۱x^{۶}}-\frac{۰/۰۶x^{۵}}{۲\sqrt{۱+۰/۰۱x^{۶}}}(۱+۰/۰۴x^{۶})}{۱+۰/۰۱x^{۶}}=\frac{۰/۲۴x^{۵}(۱+۰/۰۱x^{۶})-۰/۰۳x^{۵}(۱+۰/۰۴x^{۶})}{(۱+۰/۰۱x^{۶})^{۱/۵}}$$

$$g''(x)=\frac{۰/۲۱x^{۵}+۰/۰۰۱۲x^{۱۱}}{(۱+۰/۰۱x^{۶})^{۱/۵}}\xrightarrow{x=۶}\max|g''(x)|\simeq ۴۳=M_{۲}$$

$$n\ge\sqrt{\frac{M_{۲}(b-a)^{۳}}{۱۲\Delta I}}=\sqrt{\frac{۴۳(۶-۰)^{۳}}{۱۲(۰/۰۰۵)}}\rightarrow n\ge ۳۹۴\rightarrow h=\frac{b-a}{n}=\frac{۶}{۳۹۴}=\frac{۳}{۱۹۷}$$

$$S=۲\pi\frac{h}{۲}[g(x_{۰})+۲g(x_{۱})+۲g(x_{۲})+\cdots+۲g(x_{i})+\cdots+۲g(x_{n-۱})+g(x_{n})]=۹۹۶/۴۷۲\simeq ۹۹۶/۴۷$$

$$CT_{n}(f)=T_{n}(f)-\frac{h^{۲}}{۱۲}[g'(b)-g'(a)]$$

$$S=۹۹۶/۴۷۲-\frac{h^{۲}}{۱۲}۲\pi\left[\frac{۱+۰/۰۴\times ۶^{۶}}{\sqrt{۱+۰/۰۱\times ۶^{۶}}}-\frac{۱+۰/۰۴\times ۰^{۶}}{\sqrt{۱+۰/۰۱\times ۰^{۶}}}\right]=۹۹۶/۴۶۱۳$$

$$b)\ T_{۱}=\frac{b-a}{۲}\left(g(a)+g(b)\right)=\frac{۶-۰}{۲}۲\pi(g(۰)+g(۶))=۶\pi\times ۶\sqrt{۱+۰/۰۱\times ۶^{۶}}=۲۴۴۵/۵۱۹۰$$

$$T_{۲n}(f,\frac{h}{۲})=\frac{T_{n}(f,h)}{۲}+\frac{h}{۲}\sum_{k=۱}^{n}g_{۲k-۱}\rightarrow T_{۲}=\frac{T_{۱}}{۲}+\frac{۶}{۲}۲\pi g(۳)=۱۳۸۵/۵۷۶۵\rightarrow S_{۱}=\frac{۴T_{۲}-T_{۱}}{۴-۱}=۱۰۳۲/۲۶۲۳$$

$$T_{۴}=\frac{T_{۲}}{۲}+\frac{۳}{۲}۲\pi[g(۱/۵)+g(۴/۵)]=۱۰۹۶/۵۰۳۸\rightarrow S_{۲}=\frac{۴T_{۴}-T_{۲}}{۴-۱}=۱۰۰۰/۱۴۶۲$$

$$R_{۱}=\frac{۴^{۲}S_{۲}-S_{۱}}{۴^{۲}-۱}=۹۹۸/۰۰۵۱\ ,\ T_{۸}=\frac{T_{۴}}{۲}+\frac{۱/۵}{۲}۲\pi[g(۰/۷۵)+g(۲/۲۵)+g(۳/۷۵)+g(۵/۲۵)]=۱۰۲۱/۵۶۰۶$$

$$S_{۴}=\frac{۴T_{۸}-T_{۴}}{۴-۱}=۹۹۶/۵۷۹۵\rightarrow R_{۲}=\frac{۴^{۲}S_{۴}-S_{۲}}{۴^{۲}-۱}=۹۹۶/۳۴۱۷\Rightarrow Q_{۱}=\frac{۴^{۳}R_{۲}-R_{۱}}{۴^{۳}-۱}=۹۹۶/۳۱۵۳$$

$$T_{۱۶}=۱۰۰۲/۷۴۳۵\rightarrow S_{۸}=\frac{۴T_{۱۶}-T_{۸}}{۴-۱}=۹۹۶/۴۷۱۱\rightarrow R_{۴}=\frac{۴^{۲}S_{۸}-S_{۴}}{۴^{۲}-۱}=۹۹۶/۴۶۳۹$$

$$Q_{۲}=\frac{۴^{۳}R_{۴}-R_{۲}}{۴^{۳}-۱}=۹۹۶/۴۶۵۸\rightarrow P_{۱}=\frac{۴^{۴}Q_{۲}-Q_{۱}}{۴^{۴}-۱}=۹۹۶/۴۶۶۴$$

در محاسبه سطح $Q_{۲}$ نسبت به $R_{۴}$ دارای دقت ۲ رقم اعشار است. ولی بهتر است هر تقریب را در سطح خودش مقایسه شود. لذا $Q_{۲}$ نسبت به $Q_{۱}$ دارای دقت ۲ رقم اعشار نیست. ولی $P_{۱}$ نسبت به $Q_{۲}$ دارای دقت ۲ رقم اعشار است.

$$c)n\ge\sqrt{\frac{M_{۲}(b-a)^{3}}{۲۴\Delta I}}=\sqrt{\frac{۴۳(۶-۰)^{۳}}{۲۴(۰/۰۰۵)}}\rightarrow n\ge ۲۷۹\rightarrow h=\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۶}{۲۷۹}=\frac{۲}{۹۳}$$

$$S = ۲\pi\Delta x\left[g(x_{۰} + \frac{\Delta x}{۲}) + g(x_{۱} + \frac{\Delta x}{۲}) + ... + g(x_{n-۱} + \frac{\Delta x}{۲}) \right] = ۹۹۶/۴۵۱ \simeq ۹۹۶/۴۵$$

$$d)\int_{-۱}^{۱} g(t)dt \simeq g(\frac{-۱}{\sqrt{۳}}) + g(\frac{۱}{\sqrt{۳}}) \quad x = k_{۱}t + k_{۲} \rightarrow \begin{cases} ۰ = -k_{۱} + k_{۲} \\ ۶ = k_{۱} + k_{۲} \end{cases} \rightarrow x = ۳t + ۳$$

$$g(x) = x\sqrt{۱ + ۰/۰۱x^{۶}} = (۳t + ۳)\sqrt{۱ + ۰/۰۱(۳t + ۳)^{۶}} = g(t)$$

$$۲\pi\int_{۰}^{۶} g(x)dx = ۲\pi\int_{-۱}^{۱} g(t)۳dt = ۶\pi[g(\frac{-۱}{\sqrt{۳}}) + g(\frac{۱}{\sqrt{۳}})]$$

$$= ۶\pi\left[(۳ - \sqrt{۳})\sqrt{۱ + ۰/۰۱ \times (۳ - \sqrt{۳})^{۶}} + (۳ + \sqrt{۳})\sqrt{۱ + ۰/۰۱ \times (۳ + \sqrt{۳})^{۶}} \right] = ۹۷۳/۷۳۷$$

$$E = \frac{g^{(۲n)}(\varepsilon)}{(۲n)!}\frac{۲^{۲n+۱}(n!)^{۴}}{(۲n+۱)!(۲n)!} = \frac{g^{(۴)}(\varepsilon)}{(۴)!}\frac{۲^{۵}(۲!)^{۴}}{(۵)!(۴)!} = \frac{g^{(۴)}(\varepsilon)}{۱۳۵} \quad : \quad g^{(۴)}(x)\Big|_{max} \simeq ۸ (\text{with Matlab})$$

$$g^{(۴)}(t)\Big|_{max} \simeq ۸ \times ۳^{۶} \times ۲\pi \rightarrow E_{max} = ۳۰/۱۶$$

$$n = ۳ \rightarrow P_{۳}(x) = \frac{۱}{۲^{۳}۳!}\frac{d^{۳}}{dx^{۳}}[(x^{۲} - ۱)^{۳}] = \frac{۱}{۴۸}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}[۶x(x^{۲} - ۱)^{۲}] = \frac{۱}{۸}\frac{d}{dx}[(x^{۲} - ۱)^{۲} + ۴x^{۲}(x^{۲} - ۱)]$$

$$P_{۳}(x) = \frac{۱}{۸}\frac{d}{dx}[(۵x^{۲} - ۱)(x^{۲} - ۱)] = \frac{۱}{۸}[۱۰x(x^{۲} - ۱) + ۲x(۵x^{۲} - ۱)] = \frac{۲۰x^{۳} - ۱۲x}{۸} = ۲/۵x^{۳} - ۱/۵x$$

$$P_{۳}(x) = ۰ \rightarrow x_{۱} = -\sqrt{۰/۶} \ , \ x_{۲} = ۰ \ , \ x_{۳} = \sqrt{۰/۶}$$

$$P_{۲}(x) = \frac{۱}{۲^{۲}۲!}\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}[(x^{۲} - ۱)^{۲}] = \frac{۱}{۸}\frac{d}{dx}[۴x(x^{۲} - ۱)] = \frac{۱}{۲}[(x^{۲} - ۱) + ۲x^{۲}] = \frac{۳x^{۲} - ۱}{۴}$$

$$\omega_{i} = \frac{۲(۱ - x_{i}^{۲})}{n^{۲}[P_{n-۱}(x_{i})]^{۲}} = \frac{۲(۱ - x_{i}^{۲})}{۹[P_{۲}(x_{i})]^{۲}} \rightarrow \omega_{۱} = \omega_{۳} = \frac{۵}{۹} \ , \ \omega_{۲} = \frac{۸}{۹}$$

$$\int_{-۱}^{۱} g(t)dt \simeq \frac{۵}{۹}g(-\sqrt{۰/۶}) + \frac{۸}{۹}g(۰) + \frac{۵}{۹}g(\sqrt{۰/۶})$$

$$\pi\int_{۰}^{۶} g(x)dx = ۲\pi\int_{-۱}^{۱} g(t)۳dt = ۶\pi[\frac{۵}{۹}g(-\sqrt{۰/۶}) + \frac{۸}{۹}g(۰) + \frac{۵}{۹}g(\sqrt{۰/۶})]$$

$$= ۶\pi[\frac{۵}{۹}(-۳\sqrt{۰/۶} + ۳)\sqrt{۱ + ۰/۰۱(-۳\sqrt{۰/۶} + ۳)^{۶}} + \frac{۸}{۹}(۰ + ۳)\sqrt{۱ + ۰/۰۱(۰ + ۳)^{۶}}$$

$$+ \frac{۵}{۹}(۳\sqrt{۰/۶} + ۳)\sqrt{۱ + ۰/۰۱(۳\sqrt{۰/۶} + ۳)^{۶}}] = ۹۹۴/۸۸۱$$

$$E = \frac{g^{(۲n)}(\varepsilon)}{(۲n)!}\frac{۲^{۲n+۱}(n!)^{۴}}{(۲n+۱)!(۲n)!} = \frac{g^{(۶)}(\varepsilon)}{(۶)!}\frac{۲^{۷}(۳!)^{۴}}{(۷)!(۶)!} = \frac{g^{(۶)}(\varepsilon)}{۱۵۷۵۰} \quad : \quad g^{(۶)}(x)\Big|_{max} \simeq ۸۰ (\text{with Matlab})$$

$$g^{(۶)}(t)\Big|_{max} \simeq ۸۰ \times ۳^{۶} \times ۲\pi \rightarrow E_{max} = ۲۳/۲۷$$