جواب تمرین سری سوم

۱- بدون محورگیری

$$
\begin{cases}
2x_1+4x_2-4x_3=12\\
x_1+5x_2-5x_3-3x_4=18\\
2x_1+3x_2+x_3+3x_4=8\\
x_1+4x_2-2x_3+2x_4=8
\end{cases}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
2 & 4 & -4 & 0 & 12\\
1 & 5 & -5 & -3 & 18\\
2 & 3 & 1 & 3 & 8\\
1 & 4 & -2 & 2 & 8
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 0 & 6\\
1 & 5 & -5 & -3 & 18\\
2 & 3 & 1 & 3 & 8\\
1 & 4 & -2 & 2 & 8
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 0 & 6\\
0 & 3 & -3 & -3 & 12\\
0 & -1 & 5 & 3 & -4\\
0 & 2 & 0 & 2 & 2
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 0 & 6\\
0 & 1 & -1 & -1 & 4\\
0 & -1 & 5 & 3 & -4\\
0 & 2 & 0 & 2 & 2
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 2 & -2\\
0 & 1 & -1 & -1 & 4\\
0 & 0 & 4 & 2 & 0\\
0 & 0 & 2 & 4 & -6
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 2 & -2\\
0 & 1 & -1 & -1 & 4\\
0 & 0 & 1 & 0.5 & 0\\
0 & 0 & 2 & 4 & -6
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 2 & -2\\
0 & 1 & 0 & -0.5 & 4\\
0 & 0 & 1 & 0.5 & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & -6
\end{bmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 2 & -2\\
0 & 1 & 0 & -0.5 & 4\\
0 & 0 & 1 & 0.5 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -2
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 1 & 0 & 0 & 3\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & -2
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{cases}
x_1=2\\
x_2=3\\
x_3=1\\
x_4=-2
\end{cases}
$$

با محورگیری :

$$
\begin{bmatrix}
2 & 4 & -4 & 0 & 12\\
1 & \boxed{5} & -5 & -3 & 18\\
2 & 3 & 1 & 3 & 8\\
1 & 4 & -2 & 2 & 8
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
5 & 1 & -5 & -3 & 18\\
4 & 2 & -4 & 0 & 12\\
3 & 2 & 1 & 3 & 8\\
4 & 1 & -2 & 2 & 8
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0.2 & -1 & -0.6 & 3.6\\
4 & 2 & -4 & 0 & 12\\
3 & 2 & 1 & 3 & 8\\
4 & 1 & -2 & 2 & 8
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0.2 & -1 & -0.6 & 3.6\\
0 & 1.2 & 0 & 2.4 & -2.4\\
0 & 1.4 & 4 & \boxed{4.8} & -2.8\\
0 & 0.2 & 2 & 4.4 & -6.4
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & -0.6 & -1 & 0.2 & 3.6\\
0 & 4.8 & 4 & 1.4 & -2.8\\
0 & 2.4 & 0 & 1.2 & -2.4\\
0 & 4.4 & 2 & 0.2 & -6.4
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & -0.6 & -1 & 0.2 & 3.6\\
0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{7}{24} & -\frac{7}{12}\\
0 & 2.4 & 0 & 1.2 & -2.4\\
0 & 4.4 & 2 & 0.2 & -6.4
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -0.5 & 0.375 & 3.25\\
0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{7}{24} & -\frac{7}{12}\\
0 & 0 & \boxed{-2} & 0.5 & -1\\
0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{-6.5}{6} & \frac{-11.5}{3}
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -0.5 & 0.375 & 3.25\\
0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{7}{24} & -\frac{7}{12}\\
0 & 0 & 1 & -0.25 & 0.5\\
0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{-6.5}{6} & \frac{-11.5}{3}
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0.25 & 3.5\\
0 & 1 & 0 & 0.5 & -1\\
0 & 0 & 1 & -0.25 & 0.5\\
0 & 0 & 0 & -1.5 & -3
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0.25 & 3.5\\
0 & 1 & 0 & 0.5 & -1\\
0 & 0 & 1 & -0.25 & 0.5\\
0 & 0 & 0 & -1.5 & -3
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0.25 & 3.5\\
0 & 1 & 0 & 0.5 & -1\\
0 & 0 & 1 & -0.25 & 0.5\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 3\\
0 & 1 & 0 & 0 & -2\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

۲-چون در صورت مسئله گفته نشده که محاسبات را با چند رقم اعشار انجام دهیم، می توان نتایج را بصورت کسری دنبال کنیم یا بصورت دلخواه محاسبات را با مثلا ۳ رقم اعشار انجام دهیم که در اینجا روش دوم بکار رفته است.

$$A=\begin{bmatrix}-۳ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۳\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ ۰\end{bmatrix},\ x^{(۰)}=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$\text{stage }0: C=C^{-۱}=I\ ,\ r^{(۰)}=b-Ax^{(۰)}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\\ ۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۱\\ ۳\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ -۴\\ -۳\end{bmatrix},\ w=C^{-۱}r^{(۰)}=\begin{bmatrix}۲\\ -۴\\ -۳\end{bmatrix}$$

$$v^{(۱)}=C^{-t}w=\begin{bmatrix}۲\\ -۴\\ -۳\end{bmatrix},\ \alpha=\langle w,w\rangle=۲^{۲}+(-۴)^{۲}+(-۳)^{۲}=۲۹$$

$$\text{stage }1: u=Av^{(۱)}=\begin{bmatrix}-۳ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ -۴\\ -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۳\\ -۶\\ -۳\end{bmatrix},\ t_{۱}=\frac{\alpha}{\langle v^{(۱)},u\rangle}=\frac{۲۹}{۲(-۱۳)+(-۴)(-۶)+(-۳)(-۳)}$$

$$t_{۱}=\frac{۲۹}{۷}=۴/۱۴۳\ ,\ x^{(۱)}=x^{(۰)}+t_{۱}v^{(۱)}=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}+۴/۱۴۳\begin{bmatrix}۲\\ -۴\\ -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹/۲۸۶\\ -۱۵/۵۷۲\\ -۱۱/۴۲۹\end{bmatrix}$$

$$r^{(۱)}=r^{(۰)}-t_{۱}u=\begin{bmatrix}۲\\ -۴\\ -۳\end{bmatrix}-۴/۱۴۳\begin{bmatrix}-۱۳\\ -۶\\ -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵۵/۸۵۹\\ ۲۰/۸۵۸\\ ۹/۴۲۹\end{bmatrix},\ w=C^{-۱}r^{(۱)}=\begin{bmatrix}۵۵/۸۵۹\\ ۲۰/۸۵۸\\ ۹/۴۲۹\end{bmatrix}$$

$$\beta=\langle w,w\rangle=(۵۵/۸۵۹)^{۲}+(۲۰/۸۵۸)^{۲}+(۹/۴۲۹)^{۲}=۳۶۴۴/۱۹۰\ ,\ s_{۱}=\frac{\beta}{\alpha}=۱۲۵/۶۶۲$$

$$v^{(۲)}=C^{-t}w+s_{۱}v^{(۱)}=\begin{bmatrix}۵۵/۸۵۹\\ ۲۰/۸۵۸\\ ۹/۴۲۹\end{bmatrix}+۱۲۵/۶۶۲\begin{bmatrix}۲\\ -۴\\ -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۰۷/۱۸۳\\ -۴۸۱/۷۹۰\\ -۳۶۷/۵۵۷\end{bmatrix}$$

$$\text{stage }2: \alpha=\beta=۳۶۴۴/۱۹۰,\ u=Av^{(۲)}=\begin{bmatrix}-۳ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳۰۷/۱۸۳\\ -۴۸۱/۷۹۰\\ -۳۶۷/۵۵۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۷۷۰/۸۹۶\\ -۶۵۶/۳۹۷\\ -۳۱۳/۶۹۸\end{bmatrix}$$

$$t_{۲}=\frac{\alpha}{\langle v^{(۲)},u\rangle}=\frac{۳۶۴۴/۱۹۰}{-۱۱۲۴۴۱/۷۴۰}=-۰/۰۳۲$$

$$x^{(۲)}=x^{(۱)}+t_{۲}v^{(۲)}=\begin{bmatrix}۹/۲۸۶\\ -۱۵/۵۷۲\\ -۱۱/۴۲۹\end{bmatrix}-۰/۰۳۲\begin{bmatrix}۳۰۷/۱۸۳\\ -۴۸۱/۷۹۰\\ -۳۶۷/۵۵۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۰/۵۴۴\\ -۰/۱۵۵\\ ۰/۳۳۳\end{bmatrix}$$

$$r^{(۲)}=r^{(۱)}-t_{۲}u=\begin{bmatrix}۵۵/۸۵۹\\ ۲۰/۸۵۸\\ ۹/۴۲۹\end{bmatrix}+۰/۰۳۲\begin{bmatrix}-۱۷۷۰/۸۹۶\\ -۶۵۶/۳۹۷\\ -۳۱۳/۶۹۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۰/۸۱۰\\ -۰/۱۴۷\\ -۰/۶۰۹\end{bmatrix},\ w=C^{-۱}r^{(۲)}=\begin{bmatrix}-۰/۸۱۰\\ -۰/۱۴۷\\ -۰/۶۰۹\end{bmatrix}$$

$$\beta=\langle w,w\rangle=(-۰/۸۱۰)^{۲}+(-۰/۱۴۷)^{۲}+(-۰/۶۰۹)^{۲}=۱/۰۴۹\ ,\ s_{۲}=\frac{\beta}{\alpha}=۰$$

$$v^{(۳)} = C^{-t}w + s_۱ v^{(۲)} = \begin{bmatrix} -۰/۸۱۰ \\ -۰/۱۴۷ \\ -۰/۶۰۹ \end{bmatrix}$$

$$\text{stage } 3: \alpha = \beta = ۱/۰۴۹,\ u = Av^{(۳)} = \begin{bmatrix} -۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۰/۸۱۰ \\ -۰/۱۴۷ \\ -۰/۶۰۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۶۷۴ \\ -۱/۱۰۴ \\ -۲/۴۹۰ \end{bmatrix}$$

$$t_۳ = \frac{\alpha}{\langle v^{(۳)}, u \rangle} = \frac{۱/۰۴۹}{۰/۳۲۳} = ۳/۲۴۸$$

$$x^{(۳)} = x^{(۲)} + t_۳ v^{(۳)} = \begin{bmatrix} -۰/۵۴۴ \\ -۰/۱۵۵ \\ ۰/۳۳۳ \end{bmatrix} + ۳/۲۴۸ \begin{bmatrix} -۰/۸۱۰ \\ -۰/۱۴۷ \\ -۰/۶۰۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳/۱۷۵ \\ -۰/۶۳۲ \\ -۱/۶۴۵ \end{bmatrix}$$

به نظر می‌رسد که با نتایج بدست آمده، در این مسئله همگرایی وجود ندارد. زیرا اختلاف بین هر دو مقدار هر متغیر در دو مرحله متوالی با تعداد تکرارها تقریبا در حال افزایش است. اگر تعداد ارقام نمایش داده شده در هر محاسبه افزایش یابد، نتایج تغییر می‌کند و درصورتیکه تعداد تکرار افزایش یابد، همگرایی تحقق می‌یابد.

-۳

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ = ۱ \\ x_۱ - x_۲ = ۲ \\ x_۱ + ۲x_۲ = ۱ \end{cases} \to \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۰ & -۱/۵ & ۱/۵ \\ ۰ & ۱/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

از ماتریس نهایی مشخص است که رتبه ماتریس A برابر ۲ و رتبه ماتریش افزوده Ab برابر ۳ ، است.پس معادلات سازگار نیستند.

-۴

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ = ۴ \\ ۳x_۱ - x_۲ + ۵x_۳ = ۲ \\ ۴x_۱ + x_۲ + (a^۲ - ۱۴)x_۳ = a + ۲ \end{cases} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۴ \\ ۳ & -۱ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۱ & a^۲ - ۱۴ & a + ۲ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۷ & ۱۴ & -۱۰ \\ ۰ & -۷ & a^۲ - ۲ & a - ۱۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۲ & \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ & -۷ & a^۲ - ۲ & a - ۱۴ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & \frac{۸}{۷} \\ ۰ & ۱ & -۲ & \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ & ۰ & a^۲ - ۱۶ & a - ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow[a-۴\neq ۰]{a^۲-۱۶\neq ۰} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & \frac{۸}{۷} \\ ۰ & ۱ & -۲ & \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{a + ۴} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۸}{۷} - \frac{۱}{a + ۴} \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱۰}{۷} + \frac{۲}{a + ۴} \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{a + ۴} \end{bmatrix} \Rightarrow \forall a \neq \pm ۴ :\ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۸}{۷} - \frac{۱}{a + ۴} \\ \frac{۱۰}{۷} + \frac{۲}{a + ۴} \\ \frac{۱}{a + ۴} \end{bmatrix}$$

$$\text{if}\ \ a=-۴ \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & \frac{۸}{۷} \\ ۰ & ۱ & -۲ & \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ & ۰ & a^{۲}-۱۶ & a-۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & \frac{۸}{۷} \\ ۰ & ۱ & -۲ & \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۸ \end{bmatrix}$$

در این حالت معادلات سازگار نیستند. زیرا رتبه ماتریس A و ماتریس افزوده Ab به ترتیب ۲ و ۳ هستند.

$$\text{if}\ \ a=۴ \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & \frac{۸}{۷} \\ ۰ & ۱ & -۲ & \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ & ۰ & a^{۲}-۱۶ & a-۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & \frac{۸}{۷} \\ ۰ & ۱ & -۲ & \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۸}{۷} \\ \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \text{جواب خصوصی}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow m=۳, r=۲ \rightarrow m-r=۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad \text{جواب عمومی} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۸}{۷} \\ \frac{۱۰}{۷} \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \text{جواب کل}$$

-۵

$$\text{i) Doolittle Method} \ : \quad A=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۹ & ۱ & ۰ \\ ۳ & l_{۳۲} & ۱ \end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & u_{۲۲} & u_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & u_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$u_{۲j}=a_{۲j}-l_{۲۱}u_{۱j} \ :\ j=۲,...,n \rightarrow u_{۲۲}=a_{۲۲}-l_{۲۱}u_{۱۲}=-۱-۹(۷)=-۶۴,\ u_{۲۳}=a_{۲۳}-l_{۲۱}u_{۱۳}=۲-۹(۱)=-۷$$

$$l_{i۲}=\frac{a_{i۲}-l_{i۱}u_{۱۲}}{u_{۲۲}} \ :\ \ i=۳,...,n \rightarrow l_{۳۲}=\frac{a_{۳۲}-l_{۳۱}u_{۱۲}}{u_{۲۲}}=\frac{۵-۳(۷)}{-۶۴}=۰/۲۵$$

$$u_{mj}=a_{mj}-\sum_{k=۱}^{m-۱} l_{mk}u_{kj} \ :\ \ j=m,...,n \rightarrow$$

$$u_{۳۳}=a_{۳۳}-\sum_{k=۱}^{۲} l_{۳k}u_{k۳}=a_{۳۳}-l_{۳۱}u_{۱۳}-l_{۳۲}u_{۲۳}=۱-۳(۱)-۰/۲۵(-۷)=-۰/۲۵$$

$$L=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۹ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & -۶۴ & -۷ \\ ۰ & ۰ & -۰/۲۵ \end{bmatrix}$$

$$\text{Crout Method}: A=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۹ & l_{۲۲} & ۰ \\ ۳ & l_{۳۲} & l_{۳۳} \end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & ۱ & u_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$l_{im}=a_{im}-\sum_{k=۱}^{m-۱} l_{ik}u_{km} : i=m,...,n \rightarrow l_{۲۲}=a_{۲۲}-l_{۲۱}u_{۱۲}=-۱-۹(۷)=-۶۴, l_{۳۲}=a_{۳۲}-l_{۳۱}u_{۱۲}=۵-۳(۷)=-۱۶$$

$$u_{mj}=\frac{a_{mj}-\sum_{k=۱}^{m-۱} l_{mk}u_{kj}}{l_{mm}} \ :\ \ j=m+۱,...,n \rightarrow u_{۲۳}=\frac{a_{۲۳}-l_{۲۱}u_{۱۳}}{l_{۲۲}}=\frac{۲-۹(۱)}{-۶۴}=\frac{۷}{۶۴}$$

$$l_{im} = a_{im} - \sum_{k=۱}^{m-۱} l_{ik}u_{km} : i = m,...,n \to l_{۳۳} = a_{۳۳} - l_{۳۱}u_{۱۳} - l_{۳۲}u_{۲۳} = ۱ - ۳(۱) - (-۱۶)(\frac{۷}{۶۴}) = \frac{-۱}{۴}$$

$$L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۹ & -۶۴ & ۰ \\ ۳ & -۱۶ & \frac{-۱}{۴} \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & ۱ & \frac{۷}{۶۴} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$ii) |A| = \prod_{i=۱}^{n} l_{ii} \prod_{i=۱}^{n} u_{ii} \to |A| = ۱ \times (۱۶) = (۱۶) \times ۱ = ۱۶$$

$$iii) \text{LU factorization}: \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۹ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{۱۱} & y_{۱۲} & y_{۱۳} \\ y_{۲۱} & y_{۲۲} & y_{۲۳} \\ y_{۳۱} & y_{۳۲} & y_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \to y_{۱۱} = ۱, ۹y_{۱۱} + y_{۲۱} = ۰$$

$$\to y_{۲۱} = -۹, ۳y_{۱۱} + ۰/۲۵y_{۲۱} + y_{۳۱} = ۰ \to y_{۳۱} = -۰/۷۵, \ ....$$

$$\begin{bmatrix} y_{۱۱} & y_{۱۲} & y_{۱۳} \\ y_{۲۱} & y_{۲۲} & y_{۲۳} \\ y_{۳۱} & y_{۳۲} & y_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۹ & ۱ & ۰ \\ -۰/۷۵ & -۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & -۶۴ & -۷ \\ ۰ & ۰ & -۰/۲۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} & x_{۱۳} \\ x_{۲۱} & x_{۲۲} & x_{۲۳} \\ x_{۳۱} & x_{۳۲} & x_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۹ & ۱ & ۰ \\ -۰/۷۵ & -۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix} \to -۰/۲۵x_{۳۱} = -۰/۷۵ \to x_{۳۱} = ۳$$

$$-۶۴x_{۲۱} - ۷x_{۳۱} = -۹ \to x_{۲۱} = -\frac{۳}{۱۶}, x_{۱۱} + ۷x_{۲۱} + x_{۳۱} = ۱ \to x_{۱۱} = -\frac{۱۱}{۱۶}, \ ....$$

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} x_{۱۱} & x_{۱۲} & x_{۱۳} \\ x_{۲۱} & x_{۲۲} & x_{۲۳} \\ x_{۳۱} & x_{۳۲} & x_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱۱}{۱۶} & \frac{-۱}{۸} & \frac{۱۵}{۱۶} \\ -\frac{۳}{۱۶} & \frac{-۱}{۸} & \frac{۷}{۱۶} \\ ۳ & ۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$\text{Gauss} - \text{Jordan method}: \ A = \begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}, \ I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & -۶۴ & -۷ \\ ۰ & -۱۶ & -۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۹ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۰ & ۱ & \frac{۷}{۶۴} \\ ۰ & -۱۶ & -۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ \frac{۹}{۶۴} & \frac{-۱}{۶۴} & ۰ \\ -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱۵}{۶۴} \\ ۰ & ۱ & \frac{۷}{۶۴} \\ ۰ & ۰ & \frac{-۱}{۴} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{۱}{۶۴} & \frac{۷}{۶۴} & ۰ \\ \frac{۹}{۶۴} & \frac{-۱}{۶۴} & ۰ \\ \frac{-۳}{۴} & \frac{-۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱۵}{۶۴} \\ ۰ & ۱ & \frac{۷}{۶۴} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{۱}{۶۴} & \frac{۷}{۶۴} & ۰ \\ \frac{۹}{۶۴} & \frac{-۱}{۶۴} & ۰ \\ ۳ & ۱ & -۴ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{۱۱}{۱۶} & \frac{-۱}{۸} & \frac{۱۵}{۱۶} \\ -\frac{۳}{۱۶} & \frac{-۱}{۸} & \frac{۷}{۱۶} \\ ۳ & ۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$\text{iv)}\ \| A \|_۱ = \max_j \sum_{i=۱}^{m} | a_{ij} | \rightarrow \| A \|_۱ = \max_j (۱+۹+۳, ۷+۱+۵, ۱+۲+۱) = ۱۳$$

$$\| A^{-۱} \|_۱ = \max_j (\frac{۱۱}{۱۶} + \frac{۳}{۱۶} + ۳, \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + ۱, \frac{۱۵}{۱۶} + \frac{۷}{۱۶} + ۴) = \frac{۴۳}{۸} \rightarrow \operatorname{cond}(A)_۱ = ۱۳ \times \frac{۴۳}{۸} = ۶۹/۸۷۵$$

$$\text{v)}\ A = \begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{|A-\lambda I| = ۰} \begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱-\lambda & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱-\lambda \end{vmatrix} = ۰$$

$$(۱-\lambda) \begin{vmatrix} -۱-\lambda & ۲ \\ ۵ & ۱-\lambda \end{vmatrix} - ۷ \begin{vmatrix} ۹ & ۲ \\ ۳ & ۱-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۹ & -۱-\lambda \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۰ \rightarrow (۱-\lambda)(\lambda^۲ - ۱۱) - ۷(-۹\lambda + ۳) + (۳\lambda + ۴۸) = ۰$$

$$-\lambda^۳ + \lambda^۲ + ۷۷\lambda + ۱۶ = ۰ \rightarrow \lambda = ۹/۳۸۵۶, -۸/۱۷۷۲, -۰/۲۰۸۵$$

$$\text{Gauss – Jordan method}: \begin{bmatrix} ۱-\lambda & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱-\lambda & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\xrightarrow{\lambda = ۹/۳۸۵۶} \begin{bmatrix} -۸/۳۸۵۶ & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱۰/۳۸۵۶ & ۲ \\ ۳ & ۵ & -۸/۳۸۵۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -۰/۸۳۴۸ & -۰/۱۱۹۳ \\ ۹ & -۱۰/۳۸۵۶ & ۲ \\ ۳ & ۵ & -۸/۳۸۵۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۰/۸۳۴۸ & -۰/۱۱۹۳ \\ ۰ & -۲/۸۷۲۷ & ۳/۰۷۳۳ \\ ۰ & ۷/۵۰۴۳ & -۸/۰۲۷۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -۰/۸۳۴۸ & -۰/۱۱۹۳ \\ ۰ & ۱ & -۱/۰۶۹۸ \\ ۰ & ۷/۵۰۴۳ & -۸/۰۲۷۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱/۰۱۲۳ \\ ۰ & ۱ & -۱/۰۶۹۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۱۲۳ \\ ۱/۰۶۹۸ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱-\lambda & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱-\lambda & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \xrightarrow{\lambda = -۸/۱۷۷۲} \begin{bmatrix} ۹/۱۷۷۲ & ۷ & ۱ \\ ۹ & ۷/۱۷۷۲ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۹/۱۷۷۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰/۷۶۲۸ & ۰/۱۰۹۰ \\ ۹ & ۷/۱۷۷۲ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۹/۱۷۷۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۷۶۲۸ & ۰/۱۰۹۰ \\ ۰ & ۰/۳۱۲۰ & ۱/۰۱۹۰ \\ ۰ & ۲/۷۱۱۶ & ۸/۸۵۰۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰/۷۶۲۸ & ۰/۱۰۹۰ \\ ۰ & ۱ & ۳/۲۶۶۰ \\ ۰ & ۲/۷۱۱۶ & ۸/۸۵۰۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰/۱۶۴۴ \\ ۰ & ۱ & ۳/۲۶۶۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = ۰ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۱۶۴۴ \\ -۳/۲۶۶۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 7 & 1\\ 9 & -1-\lambda & 2\\ 3 & 5 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0\xrightarrow{\lambda=-0.2085}\begin{bmatrix}1.2085 & 7 & 1\\ 9 & -0.7915 & 2\\ 3 & 5 & 1.2085\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 5.7923 & 0.8275\\ 9 & -0.7915 & 2\\ 3 & 5 & 1.2085\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 5.7923 & 0.8275\\ 0 & -52.9222 & -5.4475\\ 0 & -12.3769 & -1.2740\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 5.7923 & 0.8275\\ 0 & 1 & 0.1029\\ 0 & -12.3769 & -1.2740\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.2315\\ 0 & 1 & 0.1029\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0\rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.2315\\ -0.1029\\ 1\end{bmatrix}$$

در قسمت v ، گفته نشده که با چند رقم محاسبات انجام شود که به دلخواه با ۴ رقم اعشار انجام شده است.

$$\text{vi) } A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 1\\ 9 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix},\ x_0=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow y_1=Ax_0=\begin{bmatrix}1\\ 9\\ 3\end{bmatrix},\lambda_1=\|y_1\|_\infty=9\rightarrow x_1=\frac{1}{\lambda_1}y_1=\begin{bmatrix}0.11\\ 1\\ 0.33\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_2=Ax_1=\begin{bmatrix}7.44\\ 0.65\\ 5.66\end{bmatrix},\lambda_2=\|y_2\|_\infty=7.44\rightarrow x_2=\frac{1}{\lambda_2}y_2=\begin{bmatrix}1\\ 0.09\\ 0.76\end{bmatrix}\rightarrow y_3=Ax_2=\begin{bmatrix}2.39\\ 10.43\\ 4.21\end{bmatrix}$$

$$,\lambda_3=\|y_3\|_\infty=10.43\rightarrow x_3=\frac{1}{\lambda_3}y_3=\begin{bmatrix}0.23\\ 1\\ 0.40\end{bmatrix}\rightarrow y_4=Ax_4=\begin{bmatrix}7.63\\ 1.87\\ 6.09\end{bmatrix},\lambda_4=\|y_4\|_\infty=7.63\rightarrow$$

$$x_4=\frac{1}{\lambda_4}y_4=\begin{bmatrix}1\\ 0.25\\ 0.80\end{bmatrix}\rightarrow y_5=Ax_5=\begin{bmatrix}3.55\\ 10.35\\ 5.05\end{bmatrix},\lambda_5=\|y_5\|_\infty=10.35\rightarrow x_5=\frac{1}{\lambda_5}y_5=\begin{bmatrix}0.34\\ 1\\ 0.49\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_6=\begin{bmatrix}7.83\\ 3.04\\ 6.51\end{bmatrix},x_6=\begin{bmatrix}1\\ 0.39\\ 0.83\end{bmatrix}\rightarrow y_7=\begin{bmatrix}4.56\\ 10.27\\ 5.78\end{bmatrix},x_7=\begin{bmatrix}0.44\\ 1\\ 0.56\end{bmatrix}\rightarrow y_8=\begin{bmatrix}8\\ 4.08\\ 6.88\end{bmatrix},x_8=\begin{bmatrix}1\\ 0.51\\ 0.86\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_9=\begin{bmatrix}5.43\\ 10.21\\ 6.41\end{bmatrix},x_9=\begin{bmatrix}0.53\\ 1\\ 0.63\end{bmatrix}\rightarrow y_{10}=\begin{bmatrix}8.16\\ 5.03\\ 7.22\end{bmatrix},x_{10}=\begin{bmatrix}1\\ 0.62\\ 0.88\end{bmatrix}\rightarrow y_{11}=\begin{bmatrix}6.22\\ 10.14\\ 6.98\end{bmatrix},x_{11}=\begin{bmatrix}0.61\\ 1\\ 0.69\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{12}=\begin{bmatrix}8.30\\ 5.87\\ 7.52\end{bmatrix},x_{12}=\begin{bmatrix}1\\ 0.71\\ 0.91\end{bmatrix}\rightarrow y_{13}=\begin{bmatrix}6.88\\ 10.11\\ 7.46\end{bmatrix},x_{13}=\begin{bmatrix}0.68\\ 1\\ 0.74\end{bmatrix}\rightarrow y_{14}=\begin{bmatrix}8.42\\ 6.60\\ 7.78\end{bmatrix},x_{14}=\begin{bmatrix}1\\ 0.78\\ 0.92\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{15}=\begin{bmatrix}7.38\\ 10.06\\ 7.82\end{bmatrix},x_{15}=\begin{bmatrix}0.73\\ 1\\ 0.78\end{bmatrix}\rightarrow y_{16}=\begin{bmatrix}8.51\\ 7.13\\ 7.97\end{bmatrix},x_{16}=\begin{bmatrix}1\\ 0.84\\ 0.94\end{bmatrix}\rightarrow y_{17}=\begin{bmatrix}7.82\\ 10.04\\ 8.14\end{bmatrix},x_{17}=\begin{bmatrix}0.78\\ 1\\ 0.81\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{18}=\begin{bmatrix}8.59\\ 7.64\\ 8.15\end{bmatrix},x_{18}=\begin{bmatrix}1\\ 0.89\\ 0.95\end{bmatrix}\rightarrow y_{19}=\begin{bmatrix}8.18\\ 10.01\\ 8.40\end{bmatrix},x_{19}=\begin{bmatrix}0.82\\ 1\\ 0.84\end{bmatrix}\rightarrow y_{20}=\begin{bmatrix}8.66\\ 8.06\\ 8.30\end{bmatrix},x_{20}=\begin{bmatrix}1\\ 0.93\\ 0.96\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{۲۱}=\begin{bmatrix}۸/۴۷\\۹/۹۹\\۸/۶۱\end{bmatrix},x_{۲۱}=\begin{bmatrix}۰/۸۵\\۱\\۰/۸۶\end{bmatrix}\rightarrow y_{۲۲}=\begin{bmatrix}۸/۷۱\\۸/۳۷\\۸/۴۱\end{bmatrix},x_{۲۲}=\begin{bmatrix}۱\\۰/۹۶\\۰/۹۷\end{bmatrix}\rightarrow y_{۲۳}=\begin{bmatrix}۸/۶۹\\۹/۹۸\\۸/۷۷\end{bmatrix},x_{۲۳}=\begin{bmatrix}۰/۸۷\\۱\\۰/۸۸\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{۲۴}=\begin{bmatrix}۸/۷۵\\۸/۵۹\\۸/۴۹\end{bmatrix},x_{۲۴}=\begin{bmatrix}۱\\۰/۹۸\\۰/۹۷\end{bmatrix}\rightarrow y_{۲۵}=\begin{bmatrix}۸/۸۳\\۹/۹۶\\۸/۸۷\end{bmatrix},x_{۲۵}=\begin{bmatrix}۰/۸۹\\۱\\۰/۸۹\end{bmatrix}\rightarrow y_{۲۶}=\begin{bmatrix}۸/۷۸\\۸/۷۹\\۸/۵۶\end{bmatrix},x_{۲۶}=\begin{bmatrix}۱\\۱\\۰/۹۷\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{۲۷}=\begin{bmatrix}۸/۹۷\\۹/۹۴\\۸/۹۷\end{bmatrix},x_{۲۷}=\begin{bmatrix}۰/۹۰\\۱\\۰/۹۰\end{bmatrix}\rightarrow y_{۲۸}=\begin{bmatrix}۸/۸۰\\۸/۹۰\\۸/۶۰\end{bmatrix},x_{۲۸}=\begin{bmatrix}۰/۹۹\\۱\\۰/۹۷\end{bmatrix}\rightarrow y_{۲۹}=\begin{bmatrix}۸/۹۶\\۹/۸۵\\۸/۹۴\end{bmatrix},x_{۲۹}=\begin{bmatrix}۰/۹۱\\۱\\۰/۹۱\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{۳۰}=\begin{bmatrix}۸/۸۲\\۹/۰۱\\۸/۶۴\end{bmatrix},x_{۳۰}=\begin{bmatrix}۰/۹۸\\۱\\۰/۹۶\end{bmatrix}\rightarrow y_{۳۱}=\begin{bmatrix}۸/۹۴\\۹/۷۴\\۸/۹۰\end{bmatrix},x_{۳۱}=\begin{bmatrix}۰/۹۲\\۱\\۰/۹۱\end{bmatrix}\rightarrow y_{۳۲}=\begin{bmatrix}۸/۸۳\\۹/۱۰\\۸/۶۷\end{bmatrix},x_{۳۲}=\begin{bmatrix}۰/۹۷\\۱\\۰/۹۵\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{۳۳}=\begin{bmatrix}۸/۹۲\\۹/۶۳\\۸/۸۶\end{bmatrix},x_{۳۳}=\begin{bmatrix}۰/۹۳\\۱\\۰/۹۲\end{bmatrix}\rightarrow y_{۳۴}=\begin{bmatrix}۸/۸۵\\۹/۲۱\\۸/۷۱\end{bmatrix},x_{۳۴}=\begin{bmatrix}۰/۹۶\\۱\\۰/۹۵\end{bmatrix}\rightarrow y_{۳۵}=\begin{bmatrix}۸/۹۱\\۹/۵۴\\۸/۸۳\end{bmatrix},x_{۳۵}=\begin{bmatrix}۰/۹۳\\۱\\۰/۹۳\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$y_{۳۶}=\begin{bmatrix}۸/۸۶\\۹/۲۳\\۸/۷۲\end{bmatrix},x_{۳۶}=\begin{bmatrix}۰/۹۶\\۱\\۰/۹۴\end{bmatrix}\rightarrow y_{۳۷}=\begin{bmatrix}۸/۹۰\\۹/۵۲\\۸/۸۲\end{bmatrix},x_{۳۷}=\begin{bmatrix}۰/۹۳\\۱\\۰/۹۳\end{bmatrix}\rightarrow y_{۳۸}=\begin{bmatrix}۸/۸۶\\۹/۲۳\\۸/۷۲\end{bmatrix},x_{۳۸}=\begin{bmatrix}۰/۹۶\\۱\\۰/۹۴\end{bmatrix}$$

در صورت مسئله گفته نشده که دقت نتیجهچند رقم اعشار باشد، پس می‌توان به دلخواه عمل نمود و مثلا دقت نتیجه را یک رقم اعشار فرض نمود و لذا لازم است که محاسبات را با ۲ رقم اعشار انجام داد. در مرحله ۳۳ به دقت یک رقم اعشار برای بردار ویژه رسیده‌ایم، ولی مقدار ویژه دقت یک رقم اعشار را ندارد(۹/۶۳ یا ۹/۱۰) چون مرحله ۳۸ مشابه مرحله ۳۶ است، نمی‌توان ادامه داد. لذا برای دقت همان بک رقم اعشار باید از ابتدا محاسبات را با ۳ رقم اعشار انجام داد تا به نتیجه رسید.

$$\text{vi) Jordan Method: } A=\begin{bmatrix}۱&۷&۱\\۹&-۱&۲\\۳&۵&۱\end{bmatrix}\rightarrow M_{۲}^{-۱}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۳&۵&۱\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\rightarrow M_{۲}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\-۰/۶&۰/۲&-۰/۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$M_{۲}^{-۱}AM_{۲}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۳&۵&۱\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۷&۱\\۹&-۱&۲\\۳&۵&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\-۰/۶&۰/۲&-۰/۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۷&۱\\۵۱&۲۱&۱۴\\۳&۵&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\-۰/۶&۰/۲&-۰/۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$M_{۲}^{-۱}AM_{۲}=\begin{bmatrix}-۳/۲&۱/۴&-۰/۴\\۳۸/۴&۴/۲&۹/۸\\۰&۱&۰\end{bmatrix}=A_{۱}\rightarrow M_{۱}^{-۱}=\begin{bmatrix}۳۸/۴&۴/۲&۹/۸\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\rightarrow M_{۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳۸/۴}&\frac{-۴/۲}{۳۸/۴}&\frac{-۹/۸}{۳۸/۴}\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$M_{۱}^{-۱}A_{۱}M_{۱}=\begin{bmatrix}۳۸/۴&۴/۲&۹/۸\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳/۲&۱/۴&-۰/۴\\۳۸/۴&۴/۲&۹/۸\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳۸/۴}&\frac{-۴/۲}{۳۸/۴}&\frac{-۹/۸}{۳۸/۴}\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$M_{۱}^{-۱}A_{۱}M_{۱}=\begin{bmatrix} ۳۸/۴ & ۸۱/۲ & ۲۵/۸ \\ ۳۸/۴ & ۴/۲ & ۹/۸ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳۸/۴} & \frac{-۴/۲}{۳۸/۴} & \frac{-۹/۸}{۳۸/۴} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۷۷ & ۱۶ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\rightarrow \lambda^{۳}-\lambda^{۲}-۷۷\lambda-۱۶=۰$$

$$\text{viii)Interpolation Method}: A=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}\rightarrow y=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۷ & ۱ \\ ۹ & -۱-\lambda & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۱-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda=۰:\ y=۱۶\ ,\ \lambda=۱:\ y=۹۳,\ \lambda=۲:\ y=۱۶۶\ ,\ \lambda=۳:\ y=۲۲۹$$

$$y=y_{۰}+\frac{\Delta y_{۰}}{۱!}u+\frac{\Delta^{۲}y_{۰}}{۲!}u(u-۱)+\frac{\Delta^{۳}y_{۰}}{۳!}u(u-۱)(u-۲)\ ,\ u=\frac{\lambda-\lambda_{۰}}{h}=\lambda$$

$$y=۱۶+\frac{۷۷}{۱!}u+\frac{-۴}{۲!}u(u-۱)-\frac{-۶}{۳!}u(u-۱)(u-۲)\rightarrow y=-\lambda^{۳}+\lambda^{۲}+۷۷\lambda+۱۶=۰$$

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^{۲}y_i$	$\Delta^{۳}y_i$
۰	۰	۱۶	۷۷	-۴	-۶
۱	۱	۹۳	۷۳	-۱۰	
۲	۲	۱۶۶	۶۳		
۳	۳	۲۲۹			