جواب تمرین سری چهارم

۱-قسمت (a) : روش نیوتن-رافسون : چون دقت این روش زیاد است از ابتدا باید محاسبات را با تعداد ارقام زیاد مثلا ۶ رقم

$$\begin{cases} -۲x^{۳}+۳y^{۲}+۴۲=۰=f(x,y) \\ ۵x^{۲}+۳y^{۳}-۶۹=۰=g(x,y) \end{cases} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=-۶x^{۲}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}=۶y\,,\ \frac{\partial g}{\partial x}=۱۰x\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}=۹y^{۲}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(۱,۱)}=(-۶)(۹)-(۶)(۱۰)\neq ۰$$

$$\begin{cases} h_n\dfrac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial x}+k_n\dfrac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial y}=-f(x_n,y_n) \\ h_n\dfrac{\partial g(x_n,y_n)}{\partial x}+k_n\dfrac{\partial g(x_n,y_n)}{\partial y}=-g(x_n,y_n) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۶x_n^{۲}h_n+۶y_nk_n=-(-۲x_n^{۳}+۳y_n^{۲}+۴۲) \\ ۱۰x_nh_n+۹y_n^{۲}k_n=-(۵x_n^{۲}+۳y_n^{۳}-۶۹) \end{cases}$$

$$h_n=\frac{\begin{vmatrix} -(-۲x_n^{۳}+۳y_n^{۲}+۴۲) & ۶y_n \\ -(۵x_n^{۲}+۳y_n^{۳}-۶۹) & ۹y_n^{۲} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -۶x_n^{۲} & ۶y_n \\ ۱۰x_n & ۹y_n^{۲} \end{vmatrix}}=\frac{۱۸x_n^{۳}y_n^{۲}-۹y_n^{۴}-۳۷۸y_n^{۲}+۳۰x_n^{۲}y_n-۴۱۴y_n}{-۵۴x_n^{۲}y_n^{۲}-۶۰x_ny_n}$$

$$h_n=\frac{-۶x_n^{۳}y_n+۳y_n^{۳}+۱۲۶y_n-۱۰x_n^{۲}+۱۳۸}{۱۸x_n^{۲}y_n+۲۰x_n}\rightarrow x_{n+۱}=\frac{۱۲x_n^{۳}y_n+۳y_n^{۳}+۱۲۶y_n+۱۰x_n^{۲}+۱۳۸}{۱۸x_n^{۲}y_n+۲۰x_n}$$

$$g_n=\frac{\begin{vmatrix} -۶x_n^{۲} & -(-۲x_n^{۳}+۳y_n^{۲}+۴۲) \\ ۱۰x_n & -(۵x_n^{۲}+۳y_n^{۳}-۶۹) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -۶x_n^{۲} & ۶y_n \\ ۱۰x_n & ۹y_n^{۲} \end{vmatrix}}=\frac{۱۰x_n^{۴}+۱۸x_n^{۲}y_n^{۳}-۴۱۴x_n^{۲}+۳۰x_ny_n^{۲}+۴۲۰x_n}{-۵۴x_n^{۲}y_n^{۲}-۶۰x_ny_n}$$

$$g_n=\frac{۱۰x_n^{۳}+۱۸x_ny_n^{۳}-۴۱۴x_n+۳۰y_n^{۲}+۴۲۰}{-۵۴x_ny_n^{۲}-۶۰y_n}\rightarrow y_{n+۱}=\frac{-۱۰x_n^{۳}+۳۶x_ny_n^{۳}+۴۱۴x_n+۳۰y_n^{۲}-۴۲۰}{۵۴x_ny_n^{۲}+۶۰y_n}$$

$$\begin{cases} x_۰=۲ \\ y_۰=۱ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۱=۳/۵۹۸۲۱۴۲۸۵۷ \\ y_۱=۲/۵۵۹۵۲۳۸۰۹۵ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۲=۳/۰۹۸۳۹۹۵۵۴۶ \\ y_۲=۲/۰۸۳۶۹۸۲۸۲۹ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۳=۳/۰۰۳۱۷۰۲۹۶۱ \\ y_۳=۲/۰۰۲۰۴۲۱۴۴۲ \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases} x_۴=۳/۰۰۰۰۰۳۲۷۹۷ \\ y_۴=۲/۰۰۰۰۰۰۷۴۵۰ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۵=۳/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \\ y_۵=۲/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \end{cases}$$

بر اساس اختلاف بین مرحله ۴ و ۵ ، دقت جواب در مرحله ۵ برابر ۵ رقم اعشار است.

قسمت (b) : روش نقطه ثابت : چون این روش یسیار کند است، کافی است محاسبات با ۲ رقم اعشار انجام شود. در اینجا محاسبات با تعداد ارقام نمایش داده شده در ماشین حساب انجام شده است.

$$\begin{cases} -۲x^{۳}+۳y^{۲}+۴۲=۰=f(x,y) \\ ۵x^{۲}+۳y^{۳}-۶۹=۰=g(x,y) \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=\sqrt[۳]{۱/۵y^{۲}+۲۱}=f_۱ \\ y=\sqrt[۳]{\dfrac{-۵}{۳}x^{۲}+۲۳}=g_۱ \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial f_۱(x,y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f_۱(x,y)}{\partial y}\right|=\left|۰+\frac{۳y}{۳\sqrt[۳]{(۱/۵y^{۲}+۲۱)^{۲}}}\right|=\left|۰+\frac{y}{\sqrt[۳]{(۱/۵y^{۲}+۲۱)^{۲}}}\right|=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵۰۶/۲۵}}\simeq ۰/۱۲۵<۱$$

$$\left|\frac{\partial g_۱(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_۱(x,y)}{\partial y}\right| = \left|\frac{\frac{-۱۰}{۳}x}{۳\sqrt[۳]{(\frac{-۵}{۳}x^۲+۲۳)^۲}} + ۰\right| = \frac{\frac{۲۰}{۳}}{۳\sqrt[۳]{\frac{۴۹}{۳}}} \simeq ۰/۸۷۶ < ۱$$

$$\begin{cases} x_۰ = ۲ \\ y_۰ = ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲/۸۲۳۱۰۸۰۸۶۶ \\ y_۱ = ۲/۵۳۷۲۲۰۸۷۰۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۲ = ۳/۱۲۹۷۲۵۶۵۸۵ \\ y_۲ = ۲/۱۳۳۸۹۹۴۰۷۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_۳ = ۳/۰۳۰۴۴۱۵۴۱۶ \\ y_۳ = ۱/۸۸۲۸۲۷۲۹۷۲ \end{cases}$$

قسمت (c) : روش steepest descent : چون این روش یسیار کند است، کافی است محاسبات با ۲ رقم اعشار انجام شود. در اینجا محاسبات با تعداد ارقام نمایش داده شده در ماشین حساب انجام شده است.

$$\begin{cases} -۲x_۱^۳ + ۳x_۲^۲ + ۴۲ = ۰ = f_۱(x_۱,x_۲) \\ ۵x_۱^۲ + ۳x_۲^۳ - ۶۹ = ۰ = f_۲(x_۱,x_۲) \end{cases} \rightarrow g(x) = f_۱^۲ + f_۲^۲, x^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \rightarrow g(x^{(۰)}) = ۲۹۵۷, F(x^{(۰)}) = \begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_۱}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_۱}{\partial x_۲} \\ \frac{\partial f_۲}{\partial x_۱} & \frac{\partial f_۲}{\partial x_۲} \end{bmatrix} \rightarrow J = \begin{bmatrix} -۶x_۱^۲ & ۶x_۲ \\ ۱۰x_۱ & ۹x_۲^۲ \end{bmatrix} \rightarrow J(x^{(۰)}) = \begin{bmatrix} -۲۴ & ۶ \\ ۲۰ & ۹ \end{bmatrix} \rightarrow \nabla g(x^{(۰)}) = ۲J^T(x^{(۰)})F(x^{(۰)})$$

$$\nabla g(x^{(۰)}) = ۲\begin{bmatrix} -۲۴ & ۲۰ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳۲۳۲ \\ -۴۸۰ \end{bmatrix} \rightarrow \left\|\nabla g(x^{(۰)})\right\|_۲ = \sqrt{(-۳۲۳۲)^۲ + (-۴۸۰)^۲} = ۳۲۶۷/۴۴۹۱۵۷۹۸۲۴$$

$$z = \frac{\nabla g(x^{(۰)})}{\left\|\nabla g(x^{(۰)})\right\|_۲} = \begin{bmatrix} -۰/۹۸۹۱۵۰۸۱۵۷ \\ -۰/۱۴۶۹۰۳۵۸۶۵ \end{bmatrix}, \alpha_۱ = ۰ \rightarrow h_۱ = g(x^{(۰)} - \alpha_۱ z) = ۲۹۵۷$$

$$\alpha_۳ = ۱ \rightarrow h_۳ = g(x^{(۰)} - \alpha_۳ z) = g(\begin{bmatrix} ۲/۹۸۹۱۵۰۸۱۵۷ \\ ۱/۱۴۶۹۰۳۵۸۶۵ \end{bmatrix}) = ۴۴۷/۸۰۳۴۵۴۹۴۵۴ < h_۱ \Rightarrow \alpha_۲ = ۰/۵$$

$$\rightarrow h_۲ = g(x^{(۰)} - \alpha_۲ z) = g(\begin{bmatrix} ۲/۴۹۴۵۷۵۴۰۷۹ \\ ۱/۰۷۳۴۵۱۷۹۳۲ \end{bmatrix}) = ۱۳۷۵/۵۵۱۶۹۱۷۶۹۸$$

$$h(\alpha) = h_۱ + (h_۲ - h_۱)(\frac{\alpha}{\alpha_۲ - \alpha_۱}) + \frac{h_۳ - ۲h_۲ + h_۱}{۲}(\frac{\alpha}{\alpha_۲ - \alpha_۱})(\frac{\alpha}{\alpha_۲ - \alpha_۱} - ۱)$$

$$h'(\alpha) = \frac{h_۲ - h_۱}{\alpha_۲ - \alpha_۱} + \frac{h_۳ - ۲h_۲ + h_۱}{۲}[\frac{۲\alpha}{(\alpha_۲ - \alpha_۱)^۲} - \frac{۱}{\alpha_۲ - \alpha_۱}] = ۰ \rightarrow \hat{\alpha} = ۱/۴۵۹۶۱۳۰۷۶۰$$

$$x^{(۱)} = x^{(۰)} - \hat{\alpha} z = \begin{bmatrix} ۳/۴۴۳۷۷۷۴۶۴۷ \\ ۱/۲۱۴۴۲۲۳۹۵۸ \end{bmatrix} \rightarrow g(x^{(۱)}) = ۱۲۶۱/۹۵۰۰۵۶۴۲۷۶, F(x^{(۱)}) = \begin{bmatrix} -۳۵/۲۵۹۲۰۳۴۰۰۱ \\ -۴/۳۲۸۸۱۴۱۵۸۲ \end{bmatrix}$$

$$J(x^{(۱)}) = \begin{bmatrix} -۷۱/۱۵۷۶۱۹۳۶۰۳ & ۷/۲۸۶۵۳۴۳۷۴۵ \\ ۳۴/۴۳۷۷۷۴۶۴۷۵ & ۱۳/۲۷۳۳۹۵۷۹۷۸ \end{bmatrix} \rightarrow \nabla g(x^{(۱)}) = ۲J^T(x^{(۱)})F(x^{(۱)}) = \begin{bmatrix} ۴۷۱۹/۷۷۲۴۹۶۰۴۰۵ \\ -۶۲۸/۷۵۰۹۲۲۵۰۱۸ \end{bmatrix}$$

$$\left\|\nabla g(x^{(۱)})\right\|_۲ = ۴۷۶۱/۴۶۸۲۷۵۳۲۵۱, \quad z = \frac{\nabla g(x^{(۱)})}{\left\|\nabla g(x^{(۱)})\right\|_۲} = \begin{bmatrix} ۰/۹۹۱۲۴۳۰۸۳۷ \\ -۰/۱۳۲۰۴۹۷۹۷۷ \end{bmatrix}$$

$$\alpha_۱ = ۰ \rightarrow h_۱ = g(x^{(۱)} - \alpha_۱ z) = ۱۲۶۱/۹۵۰۰۵۶۴۲۷۶, \quad \alpha_۳ = ۱ \rightarrow h_۳ = g(x^{(۱)} - \alpha_۳ z) = g(\begin{bmatrix} ۲/۴۵۲۵۳۴۳۸۱۱ \\ ۱/۳۴۶۴۷۲۱۹۳۵ \end{bmatrix})$$

$$h_۳ = ۱۳۲۰/۳۶۰۶۳۸۲۳۵۱ > h_۱ \Rightarrow \alpha_۳ = ۰/۵ \rightarrow h_۳ = g(x^{(۱)} - \alpha_۳ z) = g(\begin{bmatrix} ۲/۹۴۸۱۵۵۹۲۲۹ \\ ۱/۲۸۰۴۴۷۲۹۴۶ \end{bmatrix}) = ۳۸۹/۰۷۲۸۷۹۲۶۳۴$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 0.25 \rightarrow h_2 = g(x^{(1)} - \alpha_2 z) = g\left(\begin{bmatrix} 3.1959666938 \\ 1.2474348452 \end{bmatrix}\right) = 493.2585158900$$

$$h'(\alpha) = 0 \rightarrow \hat{\alpha} = 0.4141966557 \Rightarrow x^{(2)} = x^{(1)} - \hat{\alpha} z = \begin{bmatrix} 3.0332078945 \\ 1.2691169804 \end{bmatrix} \rightarrow g(x^{(2)}) = 365.1204157113$$

$$F(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -8.9811755690 \\ -16.8659094362 \end{bmatrix}, J(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -55.2021007861 & 7.6147018821 \\ 30.3320789446 & 14.4959211884 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g(x^{(2)}) = 2J^T(x^{(2)})F(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -31.5966751116 \\ -625.7517369331 \end{bmatrix} \rightarrow \left\|\nabla g(x^{(2)})\right\|_2 = 626.5489495266$$

$$z = \frac{\nabla g(x^{(1)})}{\left\|\nabla g(x^{(1)})\right\|_2} = \begin{bmatrix} 0.0504296993 \\ -0.9987276132 \end{bmatrix}, \alpha_1 = 0 \rightarrow h_1 = g(x^{(2)} - \alpha_1 z) = 365.1204157113$$

$$\alpha_3 = 1 \rightarrow h_3 = g(x^{(2)} - \alpha_3 z) = g\left(\begin{bmatrix} 3.0836375937 \\ 2.2678445936 \end{bmatrix}\right) = 184.6836293465 < h_1 \Rightarrow \alpha_2 = 0.5$$

$$h_2 = g(x^{(2)} - \alpha_2 z) = g\left(\begin{bmatrix} 3.0584227441 \\ 1.7684807870 \end{bmatrix}\right) = 65.8163641569$$

$$h'(\alpha) = 0 \rightarrow \hat{\alpha} = 0.6078725268 \Rightarrow x^{(3)} = x^{(2)} - \hat{\alpha} z = \begin{bmatrix} 3.0638627232 \\ 1.8762160582 \end{bmatrix}$$

بر اساس اختلاف بین مرحله ۲ و ۳ ، دقت جواب حتی یک رقم اعشار نیست.

قسمت (d) : چون در روش رانگ کوتا مرتبه ۴ ، خطا متناسب با $(0.25)^5 \simeq 0.001$ است،باید محاسبات را حداقل با ۳ رقم اعشار انجام داد که در اینجا محاسبات با تعداد ارقام نمایش داده شده در ماشین حساب انجام شده است.

$$\begin{cases} -2x_1^3 + 3x_2^2 + 42 = 0 = f_1(x_1, x_2) \\ 5x_1^2 + 3x_2^3 - 69 = 0 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \rightarrow J = \begin{bmatrix} -6x_1^2 & 6x_2 \\ 10x_1 & 9x_2^2 \end{bmatrix}, x(0) = x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow F(x(0)) = \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(\lambda) \\ x_2'(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x_1^2 & 6x_2 \\ 10x_1 & 9x_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix}, h = \frac{1-0}{N} = \frac{1}{4}, \lambda_j = jh \; : \; j = 0, 1, 2, 3$$

$$j = 0 : \lambda_0 = 0 \rightarrow k_1 = h[-J(x(\lambda_0))]^{-1} F(x(0)) = \frac{1}{4}\left[-J\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right]^{-1} \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 24 & -6 \\ -20 & -9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{1}{4}\frac{1}{-336}\begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 20 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix} = \frac{-1}{1344}\begin{bmatrix} -537 \\ -524 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3995535714 \\ 0.3898809523 \end{bmatrix}, k_2 = h[-J(x(\lambda_0) + \tfrac{1}{2}k_1)]^{-1} F(x(0))$$

$$k_2 = \frac{1}{4}\left[-J\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1997767857 \\ 0.1949404762 \end{bmatrix}\right)\right]^{-1} \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\left[-J\left(\begin{bmatrix} 2.1997767857 \\ 1.1949404762 \end{bmatrix}\right)\right]^{-1} \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 29.0341074411 & -7.1696428571 \\ -21.9977678571 & -12.8509446747 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3308396859 \\ 0.3285568102 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = h[-J(x(\lambda_0) + \tfrac{1}{2}k_2)]^{-1} F(x(0)) = \frac{1}{4}\left[-J\left(\begin{bmatrix} 2.1654198430 \\ 1.1642784051 \end{bmatrix}\right)\right]^{-1} \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 28.1342585780 & -6.9856704307 \\ -21.6541984297 & -12.1998978415 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 29 \\ -46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3413206159 \\ 0.3368041034 \end{bmatrix}$$

$$k_۴ = h[-J(x(\lambda_j)+k_۳)]^{-۱}F(x(۰)) = \frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۳۴۱۳۲۰۶۱۵۹ \\ ۱/۳۳۶۸۰۴۱۰۳۴ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_۴ = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳۲/۸۹۰۶۹۳۳۵۹۳ & -۸/۰۲۰۸۲۴۶۲۰۷ \\ -۲۳/۴۱۳۲۰۶۱۵۹۲ & -۱۶/۰۸۳۴۰۶۸۹۸۹ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۲۹۱۳۶۱۳۱۲۵ \\ ۰/۲۹۰۸۷۷۲۷۲۱ \end{bmatrix}$$

$$x(\lambda_۱) = x(\lambda_۰) + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴)$$

$$x(۰/۲۵) = x(۰) + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = \begin{bmatrix} ۲/۳۳۹۲۰۵۹۱۴۶ \\ ۱/۳۳۵۲۴۶۶۷۵۳ \end{bmatrix}$$

$$j = ۱ : \lambda_۱ = ۰/۲۵ \rightarrow k_۱ = h[-J(x(\lambda_۱))]^{-۱}F(x(۰)) = \frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۳۳۹۲۰۵۹۱۴۶ \\ ۱/۳۳۵۲۴۶۶۷۵۳ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} =$$

$$k_۱ = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳۲/۸۳۱۳۰۵۸۶۵۵ & -۸/۰۱۱۴۸۰۰۵۱۸ \\ -۲۳/۳۹۲۰۵۹۱۴۶۱ & -۱۶/۰۴۵۹۵۳۱۵۵۱ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۲۹۱۸۸۰۳۰۸۴ \\ ۰/۲۹۱۱۸۳۶۰۹۸ \end{bmatrix}$$

$$k_۲ = h[-J(x(\lambda_۱) + \tfrac{۱}{۲}k_۱)]^{-۱}F(x(۰))$$

$$k_۲ = \frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۴۸۵۱۴۶۰۶۸۸ \\ ۱/۴۸۰۸۳۸۴۸۰۲ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳۷/۰۵۵۷۰۵۸۹۹۸ & -۸/۸۸۵۰۳۰۸۸۱۲ \\ -۲۴/۸۵۱۴۶۰۶۸۸۱ & -۱۹/۷۳۵۹۴۳۴۳۹۹ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_۲ = \begin{bmatrix} ۰/۲۵۷۵۹۳۰۵۶۵ \\ ۰/۲۵۸۳۳۲۵۳۴۲ \end{bmatrix},\ k_۳ = h[-J(x(\lambda_۱) + \tfrac{۱}{۲}k_۲)]^{-۱}F(x(۰)) = \frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۴۶۸۰۰۲۴۴۲۹ \\ ۱/۴۶۴۴۱۲۹۴۲۴ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_۳ = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۳۶/۵۴۶۲۱۶۳۴۷۷ & -۸/۷۸۶۴۷۷۶۵۴۳ \\ -۲۴/۶۸۰۰۲۴۴۲۸۶ & -۱۹/۳۰۰۵۴۷۳۹۲۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۲۶۱۲۹۹۲۸۹۶ \\ ۰/۲۶۱۷۰۹۰۱۰۰ \end{bmatrix}$$

$$k_۴ = h[-J(x(\lambda_۱)+k_۳)]^{-۱}F(x(۰)) = \frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۶۰۰۵۰۵۲۰۴۱۸ \\ ۱/۵۹۶۹۵۵۶۸۵۳ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_۴ = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۴۰/۵۷۵۷۶۳۹۰۱۷ & -۹/۵۸۱۷۳۴۱۱۱۷ \\ -۲۶/۰۰۵۰۵۲۰۴۱۸ & -۲۲/۹۵۲۴۰۷۱۴۶۹ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۲۳۴۳۰۶۱۵۹۲ \\ ۰/۲۳۵۵۶۸۱۵۲۰ \end{bmatrix}$$

$$x(\lambda_۲) = x(\lambda_۱) + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴)$$

$$x(۰/۵) = x(۰/۲۵) + \frac{۱}{۶}(k_۱ + ۲k_۲ + ۲k_۳ + k_۴) = \begin{bmatrix} ۲/۵۹۹۸۶۷۷۷۴۶ \\ ۱/۵۹۶۳۸۵۸۱۷۰ \end{bmatrix}$$

$$j = ۲ : \lambda_۲ = ۰/۵ \rightarrow k_۱ = h[-J(x(\lambda_۲))]^{-۱}F(x(۰)) = \frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۵۹۹۸۶۷۷۷۴۶ \\ ۱/۵۹۶۳۸۵۸۱۷۰ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} =$$

$$k_۱ = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۴۰/۵۵۵۸۷۴۶۷۱۴ & -۹/۵۷۸۳۱۴۹۰۱۹ \\ -۲۵/۹۹۸۶۷۷۷۴۵۷ & -۲۲/۹۳۶۰۲۹۰۸۹۹ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۲۳۴۴۲۴۶۰۴۱ \\ ۰/۲۳۵۶۶۷۲۲۲۱ \end{bmatrix}$$

$$k_۲ = h[-J(x(\lambda_۲) + \tfrac{۱}{۲}k_۱)]^{-۱}F(x(۰))$$

$$k_۲ = \frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۷۱۷۰۸۰۰۷۶۶ \\ ۱/۷۱۴۲۱۹۴۲۸۰ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۴۴/۲۹۵۱۴۴۸۵۷۱ & -۱۰/۲۸۵۳۱۶۵۶۸۱ \\ -۲۷/۱۷۰۸۰۰۷۶۶۴ & -۲۶/۴۴۶۹۳۴۲۲۶۷ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_۲ = \begin{bmatrix} ۰/۲۱۳۶۷۰۶۶۹۹ \\ ۰/۲۱۵۳۱۴۰۶۰۶ \end{bmatrix},\ k_۳ = h[-J(x(\lambda_۲) + \tfrac{۱}{۲}k_۲)]^{-۱}F(x(۰)) = \frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۷۰۶۷۰۳۱۰۹۵ \\ ۱/۷۰۴۰۴۲۸۴۷۳ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_{۳}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۴۳/۹۵۷۴۵۰۳۳۸۴ & -۱۰/۲۲۴۲۵۷۰۸۳۷ \\ -۲۷/۰۶۷۰۳۱۰۹۵۲ & -۲۶/۱۳۳۸۵۸۲۲۸۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۲۱۵۳۹۴۹۷۶۳ \\ ۰/۲۱۶۹۵۶۰۰۵۱ \end{bmatrix}$$

$$k_{۴}=h[-J(x(\lambda_{۲})+k_{۳})]^{-۱}F(x(۰))=\frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۸۱۵۲۶۲۷۵۰۸ \\ ۱/۸۱۳۳۴۱۸۲۲۱ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_{۴}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۴۷/۵۵۴۲۲۶۱۳۷۳ & -۱۰/۸۸۰۰۵۰۹۳۲۶ \\ -۲۸/۱۵۲۶۲۷۵۰۸۳ & -۲۹/۵۹۳۸۷۷۰۷۴۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۱۹۸۲۲۱۸۹۲۰ \\ ۰/۲۰۰۰۲۵۵۹۶۴ \end{bmatrix}$$

$$x(\lambda_{۳})=x(\lambda_{۲})+\frac{۱}{۶}(k_{۱}+۲k_{۲}+۲k_{۳}+k_{۴})$$

$$x(۰/۷۵)=x(۰/۵)+\frac{۱}{۶}(k_{۱}+۲k_{۲}+۲k_{۳}+k_{۴})=\begin{bmatrix} ۲/۸۱۴۹۹۷۴۰۶۰ \\ ۱/۸۱۳۰۹۱۳۰۸۶ \end{bmatrix}$$

$$j=۳:\lambda_{۲}=۰/۷۵\rightarrow k_{۱}=h[-J(x(\lambda_{۳}))]^{-۱}F(x(۰))=\frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۸۱۴۹۹۷۴۰۶۰ \\ ۱/۸۱۳۰۹۱۳۰۸۶ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}=$$

$$k_{۱}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۴۷/۵۴۵۲۶۲۳۷۳۹ & -۱۰/۸۷۸۵۴۷۸۵۱۸ \\ -۲۸/۱۴۹۹۷۴۰۵۹۷ & -۲۹/۵۸۵۷۰۰۸۴۰۹ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۱۹۸۲۶۱۱۱۶۰ \\ ۰/۲۰۰۰۶۱۳۳۲۳ \end{bmatrix}$$

$$k_{۲}=h[-J(x(\lambda_{۳})+\tfrac{۱}{۲}k_{۱})]^{-۱}F(x(۰))$$

$$k_{۲}=\frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۹۱۴۱۲۷۹۶۴۰ \\ ۱/۹۱۳۱۲۱۹۷۴۸ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۵۰/۹۵۲۸۵۰۷۴۱۹ & -۱۱/۴۷۸۷۳۱۸۴۸۸ \\ -۲۹/۱۴۱۲۷۹۶۳۹۶ & -۳۲/۹۴۰۳۲۱۲۱۴۲ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_{۲}=\begin{bmatrix} ۰/۱۸۴۲۲۲۳۸۲۴ \\ ۰/۱۸۶۱۴۰۳۸۴۰ \end{bmatrix},\ k_{۳}=h[-J(x(\lambda_{۳})+\tfrac{۱}{۲}k_{۲})]^{-۱}F(x(۰))=\frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۲/۹۰۷۱۰۸۵۹۷۲ \\ ۱/۹۰۶۱۶۱۵۰۰۶ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_{۳}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۵۰/۷۰۷۶۸۲۳۷۴۶ & -۱۱/۴۳۶۹۶۹۰۰۳۷ \\ -۲۹/۰۷۱۰۸۵۹۷۱۷ & -۳۲/۷۰۱۰۶۴۹۹۷۸ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۱۸۵۱۶۶۷۷۹۴ \\ ۰/۱۸۷۰۵۸۱۴۷۴ \end{bmatrix}$$

$$k_{۴}=h[-J(x(\lambda_{۳})+k_{۳})]^{-۱}F(x(۰))=\frac{۱}{۴}[-J(\begin{bmatrix} ۳/۰۰۰۱۶۴۱۸۵۳ \\ ۲/۰۰۰۱۴۹۴۵۶۱ \end{bmatrix})]^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}$$

$$k_{۴}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۵۴/۰۰۵۹۱۰۸۳۳۹ & -۱۲/۰۰۰۸۹۶۷۳۶۵ \\ -۳۰/۰۰۱۶۴۱۸۵۳۴ & -۳۶/۰۰۵۳۸۰۶۱۹۹ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۲۹ \\ -۴۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰/۱۷۳۱۵۷۱۵۶۶ \\ ۰/۱۷۵۱۱۲۷۴۴۱ \end{bmatrix}$$

$$x(\lambda_{۴})=x(\lambda_{۳})+\frac{۱}{۶}(k_{۱}+۲k_{۲}+۲k_{۳}+k_{۴})$$

$$x(۱)=x(۰/۷۵)+\frac{۱}{۶}(k_{۱}+۲k_{۲}+۲k_{۳}+k_{۴})=\begin{bmatrix} ۳/۰۰۰۰۳۰۱۷۲۰ \\ ۲/۰۰۰۰۱۹۸۳۱۸ \end{bmatrix}$$

۲- درجه ۱ :

$$y=c_{۱}x+c_{۲}\rightarrow F=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۱ & ۱ \\ ۱/۳ & ۱ \\ ۱/۵ & ۱ \\ ۱/۹ & ۱ \\ ۲/۱ & ۱ \end{bmatrix},c=\begin{bmatrix} c_{۱} \\ c_{۲} \end{bmatrix},y=\begin{bmatrix} ۱/۸۴ \\ ۱/۹۶ \\ ۲/۲۱ \\ ۲/۴۵ \\ ۲/۹۴ \\ ۳/۱۸ \end{bmatrix},F^{T}y=\begin{bmatrix} ۱ & ۱/۱ & ۱/۳ & ۱/۵ & ۱/۹ & ۲/۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۸۴ \\ ۱/۹۶ \\ ۲/۲۱ \\ ۲/۴۵ \\ ۲/۹۴ \\ ۳/۱۸ \end{bmatrix}$$

$$F^{T}y=\begin{bmatrix} ۲۲/۸۰۸ \\ ۱۴/۵۸ \end{bmatrix}$$

$$F^{T}F=\begin{bmatrix} ۱ & ۱/۱ & ۱/۳ & ۱/۵ & ۱/۹ & ۲/۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱/۱ & ۱ \\ ۱/۳ & ۱ \\ ۱/۵ & ۱ \\ ۱/۹ & ۱ \\ ۲/۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴/۱۷ & ۸/۹ \\ ۸/۹ & ۶ \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} ۱۴/۱۷ & ۸/۹ \\ ۸/۹ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{۱} \\ c_{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۲/۸۰۸ \\ ۱۴/۵۸ \end{bmatrix}$$

$$c_{۱}=۱/۲۱۹۶\,,\,c_{۲}=۰/۶۲۰۹\rightarrow y\simeq ۱/۲۱۹۶x+۰/۶۲۰۹\rightarrow\sum_{j=۱}^{۶}\delta_{j}^{۲}=\sum_{j=۱}^{۶}(y-۱/۲۱۹۶x+۰/۶۲۰۹)^{۲}=۲/۷۲\times ۱۰^{-۵}$$

درجه ۲ :

$$y=c_{۱}x^{۲}+c_{۲}x+c_{۳}\rightarrow F=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۲۱ & ۱/۱ & ۱ \\ ۱/۶۹ & ۱/۳ & ۱ \\ ۲/۲۵ & ۱/۵ & ۱ \\ ۳/۶۱ & ۱/۹ & ۱ \\ ۴/۴۱ & ۲/۱ & ۱ \end{bmatrix},\,c=\begin{bmatrix} c_{۱} \\ c_{۲} \\ c_{۳} \end{bmatrix},\,y=\begin{bmatrix} ۱/۸۴ \\ ۱/۹۶ \\ ۲/۲۱ \\ ۲/۴۵ \\ ۲/۹۴ \\ ۳/۱۸ \end{bmatrix}$$

$$F^{T}y=\begin{bmatrix} ۱ & ۱/۲۱ & ۱/۶۹ & ۲/۲۵ & ۳/۶۱ & ۴/۴۱ \\ ۱ & ۱/۱ & ۱/۳ & ۱/۵ & ۱/۹ & ۲/۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱/۸۴ \\ ۱/۹۶ \\ ۲/۲۱ \\ ۲/۴۵ \\ ۲/۹۴ \\ ۳/۱۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۸/۰۹۶۲ \\ ۲۲/۸۰۸۰ \\ ۱۴/۵۸۰۰ \end{bmatrix}$$

$$F^{T}F=\begin{bmatrix} ۱ & ۱/۲۱ & ۱/۶۹ & ۲/۲۵ & ۳/۶۱ & ۴/۴۱ \\ ۱ & ۱/۱ & ۱/۳ & ۱/۵ & ۱/۹ & ۲/۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۲۱ & ۱/۱ & ۱ \\ ۱/۶۹ & ۱/۳ & ۱ \\ ۲/۲۵ & ۱/۵ & ۱ \\ ۳/۶۱ & ۱/۹ & ۱ \\ ۴/۴۱ & ۲/۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴۲/۸۶۲۹ & ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ \\ ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ & ۸/۹۰۰۰ \\ ۱۴/۱۷۰۰ & ۸/۹۰۰۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۴۲/۸۶۲۹ & ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ \\ ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ & ۸/۹۰۰۰ \\ ۱۴/۱۷۰۰ & ۸/۹۰۰۰ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{۱} \\ c_{۲} \\ c_{۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۸/۰۹۶۲ \\ ۲۲/۸۰۸۰ \\ ۱۴/۵۸۰۰ \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} c_{۱} \\ c_{۲} \\ c_{۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۰/۰۱۰۹ \\ ۱/۲۵۳۳ \\ ۰/۵۹۶۶ \end{bmatrix}$$

$$y\simeq -۰/۰۱۰۹x^{۲}+۱/۲۵۳۳x+۰/۵۹۶۶\rightarrow\sum_{j=۱}^{۶}\delta_{j}^{۲}=\sum_{j=۱}^{۶}(y+۰/۰۱۰۹x^{۲}-۱/۲۵۳۳x-۰/۵۹۶۶۹)^{۲}=۱/۸\times ۱۰^{-۵}$$

درجه ۳ :

$$y = c_۱x^۳ + c_۲x^۲ + c_۳x + c_۴ \rightarrow F = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۳۳۱ & ۱/۲۱ & ۱/۱ & ۱ \\ ۲/۱۹۷ & ۱/۶۹ & ۱/۳ & ۱ \\ ۳/۳۷۵ & ۲/۲۵ & ۱/۵ & ۱ \\ ۶/۸۵۹ & ۳/۶۱ & ۱/۹ & ۱ \\ ۹/۲۶۱ & ۴/۴۱ & ۲/۱ & ۱ \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \\ c_۴ \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} ۱/۸۴ \\ ۱/۹۶ \\ ۲/۲۱ \\ ۲/۴۵ \\ ۲/۹۴ \\ ۳/۱۸ \end{bmatrix}$$

$$F^Ty = \begin{bmatrix} ۱ & ۱/۳۳۱ & ۲/۱۹۷ & ۳/۳۷۵ & ۶/۸۵۹ & ۹/۲۶۱ \\ ۱ & ۱/۲۱ & ۱/۶۹ & ۲/۲۵ & ۳/۶۱ & ۴/۴۱ \\ ۱ & ۱/۱ & ۱/۳ & ۱/۵ & ۱/۹ & ۲/۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱/۸۴ \\ ۱/۹۶ \\ ۲/۲۱ \\ ۲/۴۵ \\ ۲/۹۴ \\ ۳/۱۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶۷/۱۸۸۳۲ \\ ۳۸/۰۹۶۲ \\ ۲۲/۸۰۸ \\ ۱۴/۵۸ \end{bmatrix}$$

$$F^TF = \begin{bmatrix} ۱ & ۱/۳۳۱ & ۲/۱۹۷ & ۳/۳۷۵ & ۶/۸۵۹ & ۹/۲۶۱ \\ ۱ & ۱/۲۱ & ۱/۶۹ & ۲/۲۵ & ۳/۶۱ & ۴/۴۱ \\ ۱ & ۱/۱ & ۱/۳ & ۱/۵ & ۱/۹ & ۲/۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۳۳۱ & ۱/۲۱ & ۱/۱ & ۱ \\ ۲/۱۹۷ & ۱/۶۹ & ۱/۳ & ۱ \\ ۳/۳۷۵ & ۲/۲۵ & ۱/۵ & ۱ \\ ۶/۸۵۹ & ۳/۶۱ & ۱/۹ & ۱ \\ ۹/۲۶۱ & ۴/۴۱ & ۲/۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$F^TF = \begin{bmatrix} ۱۵۱/۸۰۱۰ & ۷۹/۵۱۹۲ & ۴۲/۸۶۲۹ & ۲۴/۰۲۳۰ \\ ۷۹/۵۱۹۲ & ۴۲/۸۶۲۹ & ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ \\ ۴۲/۸۶۲۹ & ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ & ۸/۹۰۰۰ \\ ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ & ۸/۹۰۰۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱۵۱/۸۰۱۰ & ۷۹/۵۱۹۲ & ۴۲/۸۶۲۹ & ۲۴/۰۲۳۰ \\ ۷۹/۵۱۹۲ & ۴۲/۸۶۲۹ & ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ \\ ۴۲/۸۶۲۹ & ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ & ۸/۹۰۰۰ \\ ۲۴/۰۲۳۰ & ۱۴/۱۷۰۰ & ۸/۹۰۰۰ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \\ c_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶۷/۱۸۸۳۲ \\ ۳۸/۰۹۶۲ \\ ۲۲/۸۰۸ \\ ۱۴/۵۸ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \\ c_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۰۱۰۰ \\ ۰/۰۳۵۳ \\ ۱/۱۸۵۰ \\ ۰/۶۲۹۰ \end{bmatrix}$$

$$y \simeq -۰/۰۱۰۰x^۳ + ۰/۰۳۵۳x^۲ + ۱/۱۸۵۰x + ۰/۶۲۹۰$$

$$\sum_{j=۱}^{۶} \delta_j^۲ = \sum_{j=۱}^{۶} (y + ۰/۰۱۰۰x^۳ - ۰/۰۳۵۳x^۲ - ۱/۱۸۵۰x - ۰/۶۲۹۰)^۲ = ۱/۷۴ \times ۱۰^{-۵}$$

از نظر مجموع مربعات خطا، چندجمله‌ای درجه ۳ مناسبتر است ولی از لحاظ ضرایب به نظر می‌رسد که چندجمله‌ای درجه یک مناسب می‌باشد.

$$h'(\alpha) = ۰ \rightarrow \hat{\alpha} = ۰/۶۰۷۸۷۲۵۲۶۸ \Rightarrow x^{(۳)} = x^{(۲)} - \hat{\alpha}z = \begin{bmatrix} ۳/۰۶۳۸۶۲۷۲۳۲ \\ ۱/۸۷۶۲۱۶۰۵۸۲ \end{bmatrix}$$

بر اساس اختلاف بین مرحله ۲ و ۳ ، دقت جواب حتی یک رقم اعشار نیست.

قسمت (e) : روش نیوتن- رافسون در صورت همگرایی بسیار سریعتر با دقت بالاتر نسبت روش steppest descent و نقطه ثابت به جواب می‌رسد.

۳- چندجمله‌ای درجه صفر تا ۲ لژاندر عبارتند از :

$$\phi_0(x)=1,\ \phi_1(x)=x,\ \phi_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ f(x)=\cos(\pi x),\ c_k=\frac{\int_a^b w(x)\phi_k(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)\phi_k^2(x)dx},\ w(x)=1$$

$$c_0=\frac{\int_{-1}^{1}\cos(\pi x)dx}{\int_{-1}^{1}dx}=\frac{\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_{-1}^{1}}{2}=0,\ c_1=\frac{\int_{-1}^{1}x\cos(\pi x)dx}{\int_{-1}^{1}x^2dx}=\frac{x\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)dx}{\frac{2}{3}}$$

$$c_1=\frac{3}{2}\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\Big|_{-1}^{1}=0,\ c_2=\frac{\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(3x^2-1)\cos(\pi x)dx}{\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(3x^2-1)^2dx}=\frac{\frac{1}{2}(3x^2-1)\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{3}{\pi}x\sin(\pi x)dx}{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(9x^4-6x^2+1)dx}$$

$$c_2=\frac{\frac{-3}{\pi}[x\frac{-1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)dx]}{\frac{1}{4}(\frac{9}{5}x^5-2x^3+x)\Big|_{-1}^{1}}=\frac{\frac{-3}{\pi}[\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\Big|_{-1}^{1}]}{\frac{2}{4}(\frac{9}{5}-2+1)}=\frac{\frac{-6}{\pi^2}}{\frac{2}{5}}=\frac{-15}{\pi^2}$$

$$f(x)\simeq\frac{-7/5}{\pi^2}(3x^2-1)\to E=\int_{-1}^{1}[\cos(\pi x)-\frac{-7/5}{\pi^2}(3x^2-1)]^2dx$$

$$E=\int_{-1}^{1}[\cos^2(\pi x)+\frac{15}{\pi^2}(3x^2-1)\cos(\pi x)+\frac{56/25}{\pi^4}(3x^2-1)^2]dx$$

$$E=\int_{-1}^{1}[0/5+0/5\cos(2\pi x)-\frac{15}{\pi^2}\cos(\pi x)+\frac{45}{\pi^2}x^2\cos(\pi x)+\frac{56/25}{\pi^4}(3x^2-1)^2]dx$$

$$E=1+\int_{-1}^{1}[\frac{45}{\pi^2}x^2\cos(\pi x)+\frac{56/25}{\pi^4}(9x^4-6x^2+1)]dx=$$

$$E=1+\frac{8}{5}\frac{56/25}{\pi^4}+\frac{45}{\pi^2}[x^2\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}x\sin(\pi x)dx]=$$

$$E=1+\frac{90}{\pi^4}-\frac{90}{\pi^3}[x\frac{-1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)dx]=1+\frac{90}{\pi^4}-\frac{90}{\pi^3}[\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)\Big|_{-1}^{1}]=1-\frac{90}{\pi^4}$$

-۴

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3\geq 2\\ -x_1+x_2+x_3\geq 4\\ 2x_1+x_3\geq 6\\ x_1+x_2+x_3\geq 2\end{cases},\ x_j\geq 0:\ \forall j, f=x_1+2x_2+x_3$$

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4+x_8=2\\ -x_1+x_2+x_3-x_5+x_9=4\\ 2x_1+x_3-x_6+x_{10}=6\\ x_1+x_2+x_3-x_7+x_{11}=2\end{cases},\ x_j\geq 0:\ \forall j, F=-x_1-2x_2-x_3$$

$$F=-x_1-2x_2-x_3-M(x_8+x_9+x_{10}+x_{11})$$

$$\begin{cases} x_{۸} = ۲ - x_{۱} + ۲x_{۲} - x_{۳} + x_{۴} \\ x_{۹} = ۴ + x_{۱} - x_{۲} - x_{۳} + x_{۵} \\ x_{۱۰} = ۶ - ۲x_{۱} - x_{۳} + x_{۶} \\ x_{۱۱} = ۲ - x_{۱} - x_{۲} - x_{۳} + x_{۷} \end{cases}$$

$$F = (۳M - ۱)x_{۱} - ۲x_{۲} + (۴M - ۱)x_{۳} - Mx_{۴} - Mx_{۵} - Mx_{۶} - Mx_{۷} - ۱۴M$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & \boxed{۱} & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ - ۳M & ۲ & \boxed{۱ - ۴M} & M & M & M & M & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱۴M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ -۲ & \boxed{۳} & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ M & \boxed{۴ - ۸M} & ۰ & -۳M + ۱ & M & M & M & ۴M - ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۶M - ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ \frac{-۲}{۳} & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{-۱}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{-۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{۲}{۳} \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ M & \boxed{۴ - ۸M} & ۰ & -۳M + ۱ & M & M & M & ۴M - ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۶M - ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-۱}{۳} & ۰ & ۱ & \frac{-۱}{۳} & \frac{-۲}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{۱۰}{۳} \\ \frac{-۲}{۳} & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{-۱}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{-۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ & \frac{۲}{۳} \\ \boxed{\frac{۷}{۳}} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & -۱ & ۰ & \frac{-۱}{۳} & \frac{-۲}{۳} & ۱ & ۰ & \frac{۸}{۳} \\ ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & -۲ \\ \boxed{\frac{-۱۳M}{۳} + \frac{۸}{۳}} & ۰ & ۰ & -\frac{M}{۳} - \frac{۱}{۳} & \frac{-۵}{۳}M + \frac{۴}{۳} & M & M & \frac{۴}{۳}M + \frac{۱}{۳} & \frac{۸M - ۴}{۳} & ۰ & ۰ & -\frac{۲}{۳}M - \frac{۱۴}{۳} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & \frac{-۲}{۷} & \frac{-۴}{۷} & \frac{-۱}{۷} & ۰ & \frac{۲}{۷} & \frac{۴}{۷} & \frac{۱}{۷} & ۰ & \frac{۲۶}{۷} \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۳}{۷} & \frac{-۱}{۷} & \frac{-۲}{۷} & ۰ & \frac{-۳}{۷} & \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} & ۰ & \frac{۱۰}{۷} \\ ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} & \frac{-۳}{۷} & ۰ & \frac{-۱}{۷} & \frac{-۲}{۷} & \frac{۳}{۷} & ۰ & \frac{۸}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{-۲}{۷} & \frac{۳}{۷} & \frac{۶}{۷} & -۱ & \frac{۲}{۷} & \frac{-۳}{۷} & \frac{-۶}{۷} & ۱ & \frac{-۳۰}{۷} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۲M-۵}{۷} & \frac{-۳M+۴}{۷} & \frac{-۶M+۸}{۷} & M & \frac{۵}{۷}M+\frac{۵}{۷} & \frac{۱۰M-۴}{۷} & \frac{۳۹M-۲۴}{۷} & ۰ & \frac{۳۰}{۷}M-\frac{۵۴}{۷} \end{bmatrix}$$

مسئله جواب ندارد. زیرا در آخرین عبارت منفی وجود دارد ولی نمی‌توان جلوتر رفت.

-۵

$$V=\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}+\pi R^{۲}L=۸۴۰۰\rightarrow g=\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}+\pi R^{۲}L-۸۴۰۰,\ S=۲\pi RL+\pi R^{۲}+۲\pi R^{۲}=۲\pi RL+۳\pi R^{۲}$$

$$F=S-\lambda g=۲\pi RL+۳\pi R^{۲}-\lambda(\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}+\pi R^{۲}L-۸۴۰۰)\rightarrow\frac{\partial F}{\partial R}=۲\pi L+۶\pi R-\lambda(۲\pi R^{۲}+۲\pi RL)=۰\ \boxed{۱}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L}=۲\pi R-\lambda\pi R^{۲}=۰\ \boxed{۲}\rightarrow\lambda=\frac{۲}{R}\ \boxed{۳},\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}=-(\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}+\pi R^{۲}L-۸۴۰۰)=۰\ \boxed{۴}$$

$$\boxed{۱}\xrightarrow{\boxed{۳}}۲\pi L+۶\pi R-\frac{۲}{R}(۲\pi R^{۲}+۲\pi RL)=۰\rightarrow ۲\pi L+۶\pi R-۴\pi R-۴\pi L=۰\Rightarrow L=R\quad\boxed{۵}$$

$$\boxed{۴}\xrightarrow{\boxed{۵}}\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}+\pi R^{۳}-۸۴۰۰=۰\rightarrow\pi R^{۳}=۵۰۴۰\Rightarrow R=\sqrt[۳]{\frac{۵۰۴۰}{\pi}}\ ,\ L=\sqrt[۳]{\frac{۵۰۴۰}{\pi}}$$