پاسخ امتحان میان ترم روشهای محاسبات عددی ۹۴/۹/۲

۱- بدون قضیه : $(۳/۴۸, ۰/۷\%) \to \dfrac{\Delta Q}{|Q|} \le ۰/۰۰۷ \to \Delta Q \le ۰/۰۰۷|Q| \xrightarrow{|Q|\le|Q_۱|+\Delta Q}$

$\Delta Q \le ۰/۰۰۷(|Q_۱| + \Delta Q) \to ۰/۹۹۳\Delta Q \le ۰/۰۰۷|Q_۱| = ۰/۰۲۴۳۶ \to \Delta Q \le ۰/۰۲۵ < ۰/۰۵$

پس آخرین رقم با معنی، رقم اول اعشار است. لذا این عدد دارای ۲ رقم با معنی صحیح است.

با قضیه : $\dfrac{\Delta Q}{|Q|} \le ۰/۰۰۷ < ۵\times ۱۰^{-۲}$

پس این عدد ۲ رقم با معنی صحیح دارد.

بدون قضیه : $(۱۳۱۴۶, ۰/۱\%) \to \dfrac{\Delta Q}{|Q|} \le ۰/۰۰۱ \to \Delta Q \le ۰/۰۰۱|Q| \xrightarrow{|Q|\le|Q_۱|+\Delta Q} \Delta Q \le ۰/۰۰۱(|Q_۱| + \Delta Q)$

$۰/۹۹۹\Delta Q \le ۰/۰۰۱|Q_۱| = ۱۳/۱۴۶ \to \Delta Q \le ۱۳/۱۵۹ < ۵۰$

پس آخرین رقم با معنی، رقم صدگان است. لذا این عدد دارای ۳ رقم با معنی صحیح است.

با قضیه : $\dfrac{\Delta Q}{|Q|} \le ۰/۰۰۱ < ۵\times ۱۰^{-۳}$

پس این عدد ۳ رقم با معنی صحیح دارد.

۲- $S = ۴\pi r^۲ = ۴xy^۲$

$x = ۳/۱۴۲ :\ e_x \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۳}\ ,\ \ y = ۲/۳۳۳ :\ e_y \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۳}$

$S = ۴(۳/۱۴۲)(۲/۳۳۳)^۲ = ۴(۳/۱۴۲)(۵/۴۴۳) = ۶۸/۴۰۸$

$e_s \le e_x\left|\dfrac{\partial S}{\partial x}\right| + e_y\left|\dfrac{\partial S}{\partial y}\right| \to e_s \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۳}(۴y^۲ + ۸xy) = \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۳}(۲۱/۷۷۲ + ۵۸/۶۴۲) \to e_s \le ۰/۰۴۰۲$

$e'_s \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۳} + e_s \to e'_s \le ۰/۰۴۰۷$

۳- $p(x) = ۲x^۳ + ۹x^۲ + ۷x - ۶ \to p(-x) = -۲x^۳ + ۹x^۲ - ۷x - ۶$

p(x) یک تغییر علامت دارد. پس یک ریشه مثبت دارد. p(-x) دو تغییر علامت دارد. لذا p(x) ، ۲ ریشه منفی دارد و یا اینکه ریشه منفی ندارد. $p(۰) = -۶\ ,\ p(۱) = ۱۲\ ,\ p(-۱) = -۶\ ,\ p(-۲/۵) = ۱/۵\ ,\ p(-۳/۵) = -۵۳$

پس ریشه مثبت بین صفر و یک ، و دو ریشه منفی در بازه $[-۲/۵, -۱]$ و $[-۳/۵, -۲/۵]$ قرار دارند.

$|x| \le ۱ + \frac{۱}{۲}(۹) = ۵/۵\ ,\ |x| \ge \dfrac{۶}{۶+۹} = ۰/۴ \Rightarrow ۰/۴ \le |x| \le ۵/۵$

بررسی ریشه‌های کسری : $a_n = -۶\ ,\ a_۰ = ۲$

$$\frac{p}{q} = \frac{\pm۱, \pm۲, \pm۳, \pm۶}{\pm۱, \pm۲} = \begin{cases} \pm۱, \frac{\pm۱}{۲} \\ \pm۲, \pm۱ \\ \pm۳, \pm\frac{۳}{۲} \\ \pm۶, \pm۳ \end{cases} = \begin{cases} \pm۱, \frac{\pm۱}{۲} \\ \pm۲ \\ \pm۳, \pm\frac{۳}{۲} \\ \pm۶ \end{cases}$$

با بررسی موارد فوق در معادله p(x)=0 ، مشخص می‌شود که سه مقدار ۰/۵ و ۳- و ۲- ریشه‌های کسری معادله هستند.

۴- $x^۳ - ۶x^۲ + ۱۱x - ۶ = ۰$

$k = ۱ \to p(x)\,p(-x) = -x^۶ + ۱۴x^۴ - ۴۹x + ۳۶ \to p_۱(x) = -x^۳ + ۱۴x^۲ - ۴۹x + ۳۶$

$$k=۲ \rightarrow p_۱(x)\,p_۱(-x)=-x^۶+۹۸x^۴-۱۳۹۳x+۱۲۹۶ \rightarrow p_۲(x)=-x^۳+۹۸x^۲-۱۳۹۳x+۱۲۹۶$$

$$k=۳ \rightarrow p_۲(x)\,p_۲(-x)=-x^۶+۶۸۱۸x^۴-۱۶۸۶۴۳۳x+۱۶۷۹۶۱۶$$

$$p_۳(x)=-x^۳+۶۸۱۸x^۲-۱۶۸۶۴۳۳x+۱۶۷۹۶۱۶$$

$$k=۱ \rightarrow \sqrt{\frac{۳۶}{۴۹}}=۰/۸۵۷\ ,\ \sqrt{\frac{۴۹}{۱۴}}=۱/۸۷۱\ ,\ \sqrt{۱۴}=۳/۷۴۲$$

$$k=۲ \rightarrow \sqrt[۴]{\frac{۱۲۹۶}{۱۳۹۳}}=۰/۹۸۲\ ,\ \sqrt[۴]{\frac{۱۳۹۳}{۹۸}}=۱/۹۴۲\ ,\ \sqrt[۴]{۹۸}=۳/۱۴۶$$

$$k=۳ \rightarrow \sqrt[۸]{\frac{۱۶۷۹۶۱۶}{۱۶۸۶۴۳۳}}=۰/۹۹۹\ ,\ \sqrt[۸]{\frac{۱۶۸۶۴۳۳}{۶۸۱۸}}=۱/۹۹۱\ ,\ \sqrt[۸]{۶۸۱۸}=۳/۰۱۴$$

-۵

$$f_i^{(۴)}=\frac{f_{i+۲}-۴f_{i+۱}+۶f_i-۴f_{i-۱}+f_{i-۲}}{h^۴}+\text{error}$$

$$f_{i+۲}=f_i+\frac{۲h}{۱!}f_i'+\frac{(۲h)^۲}{۲!}f_i''+\frac{(۲h)^۳}{۳!}f_i'''+\frac{(۲h)^۴}{۴!}f_i^{(۴)}+\frac{(۲h)^۵}{۵!}f_i^{(۵)}+\frac{(۲h)^۶}{۴!}f_i^{(۶)}+\ldots$$

$$f_{i+۱}=f_i+\frac{h}{۱!}f_i'+\frac{(h)^۲}{۲!}f_i''+\frac{(h)^۳}{۳!}f_i'''+\frac{(h)^۴}{۴!}f_i^{(۴)}+\frac{(h)^۵}{۵!}f_i^{(۵)}+\frac{(h)^۶}{۴!}f_i^{(۶)}+\ldots$$

$$f_{i-۱}=f_i-\frac{h}{۱!}f_i'+\frac{(h)^۲}{۲!}f_i''-\frac{(h)^۳}{۳!}f_i'''+\frac{(h)^۴}{۴!}f_i^{(۴)}-\frac{(h)^۵}{۵!}f_i^{(۵)}+\frac{(h)^۶}{۴!}f_i^{(۶)}+\ldots$$

$$f_{i-۲}=f_i-\frac{۲h}{۱!}f_i'+\frac{(۲h)^۲}{۲!}f_i''-\frac{(۲h)^۳}{۳!}f_i'''+\frac{(۲h)^۴}{۴!}f_i^{(۴)}-\frac{(۲h)^۵}{۵!}f_i^{(۵)}+\frac{(۲h)^۶}{۴!}f_i^{(۶)}+\ldots$$

$$f_{i+۲}-۴f_{i+۱}+۶f_i-۴f_{i-۱}+f_{i-۲}=h^۴f_i^{(۴)}+\frac{h^۶}{۶}f_i^{(۶)}+\ldots \rightarrow \frac{f_{i+۲}-۴f_{i+۱}+۶f_i-۴f_{i-۱}+f_{i-۲}}{h^۴}=f_i^{(۴)}+\frac{h^۲}{۶}f_i^{(۶)}+\ldots$$

$$\text{error}=\frac{h^۲}{۶}f_i^{(۶)}+\ldots=O(h^۲)$$

۶- تعداد نقاط سه است. پس : $n=۲$

$$L_۰(x)=\prod_{j=۰,\,j\neq ۰}^{۲}\frac{(x-x_j)}{(x_۰-x_j)}=\frac{(x-۱)(x-۲)}{(۰-۱)(۰-۲)}=\frac{x^۲-۳x+۲}{۲},\ L_۱(x)=\prod_{j=۰,\,j\neq ۱}^{۲}\frac{(x-x_j)}{(x_۱-x_j)}=\frac{(x-۰)(x-۲)}{(۱-۰)(۱-۲)}=\frac{x^۲-۲x}{-۱}$$

$$L_۲(x)=\prod_{j=۰,\,j\neq ۲}^{۲}\frac{(x-x_j)}{(x_۲-x_j)}=\frac{(x-۰)(x-۱)}{(۲-۰)(۲-۱)}=\frac{x^۲-x}{۲},\ p(x)=۱L_۰(x)+۰/۵L_۱(x)+\frac{۱}{۳}L_۲(x)=\frac{۱}{۶}x^۲-\frac{۲}{۳}x+۱$$

$$f(x)=\frac{۱}{۱+x}=(۱+x)^{-۱} \rightarrow f'(x)=-(۱+x)^{-۲} \rightarrow f''(x)=۲(۱+x)^{-۳} \rightarrow f'''(x)=-۶(۱+x)^{-۴}$$

$$۰\leq x\leq ۲ \rightarrow \max|f'''(x)|=۶ \Rightarrow |E|\leq \frac{|x(x-۱)(x-۲)|}{۳!}(۶) \rightarrow |E|\leq |x(x-۱)(x-۲)|$$

$$y_۱=x(x-۱)(x-۲)=x^۳-۳x^۲+۲x \rightarrow y_۱'=۳x^۲-۶x+۲=۰ \Rightarrow x=۱\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس با توجه به جدول زیر داریم : $\max|x(x-۱)(x-۲)|=۰/۳۸۴۹ \rightarrow |E|\leq ۰/۳۸۴۹$

x	$-\infty$	۰	$۱-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۱	$۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۲	$+\infty$
$y'_{۱}$	$+\infty$	+	۰	−	۰	+	$+\infty$
$y_{۱}$	$-\infty$ ↗	۰ ↗	۰/۳۸۴۹ ↘	۰ ↘	−۰/۳۸۴۹ ↗	۰ ↗	$+\infty$

$f(x,y)=\cos(۲x)+\sin(۳y)\ ,\ x_{۰}=۰\ ,\ y_{۰}=۱\ ,\ h=۰/۲$ ۷-

$y_{۱}=۱+۰/۱[f(۰,۱)+f(۰/۲,۱+۰/۲f(۰,۱))]=۱+۰/۱[۱/۱۴۱۱+f(۰/۲,۱/۲۲۸۲)]=$

$y_{۱}=۱+۰/۱[۱/۱۴۱۱+۰/۴۰۴۳]=۱/۱۵۴۵$

$y_{۲}=۱/۱۵۴۵+۰/۱[f(۰/۲,۱/۱۵۴۵)+f(۰/۴,۱/۱۵۴۵+۰/۲f(۰/۲,۱/۱۵۴۵))]$

$y_{۲}=۱/۱۵۴۵+۰/۱[۰/۶۰۴۷+f(۰/۴,۱/۲۷۵۴)]=۱/۱۵۴۵+۰/۱[۰/۶۰۴۷+۰/۰۶۴۳]=۱/۲۲۱۴$

$y_{۳}=۱/۲۲۱۴+۰/۱[f(۰/۴,۱/۲۲۱۴)+f(۰/۶,۱/۲۲۱۴+۰/۲f(۰/۴,۱/۲۲۱۴))]$

$y_{۳}=۱/۲۲۱۴+۰/۱[۰/۱۹۷۶+f(۰/۶,۱/۲۶۰۹)]=۱/۲۲۱۴+۰/۱[۰/۱۹۷۶-۰/۲۳۵۷]=۱/۲۱۷۶$

$y_{۴}=۱/۲۱۷۶+۰/۱[f(۰/۶,۱/۲۱۷۶)+f(۰/۸,۱/۲۱۷۶+۰/۲f(۰/۶,۱/۲۱۷۶))]$

$y_{۴}=۱/۲۱۷۶+۰/۱[-۰/۱۲۶۹+f(۰/۸,۱/۱۹۲۲)]=۱/۲۱۷۶+۰/۱[-۰/۱۲۶۹-۰/۴۵۰۶]=۱/۱۵۹۹$

$y''+xy=۰\ ,\ ۰\le x\le ۰/۱\ ,\ y(۰)=۱\ ,\ y'(۰)=۰/۵\ ,\ h=۰/۱$ ۸-

$$\begin{cases} y'=p=f_{۱}(x,y,p) \\ p'=-xy=f_{۲}(x,y,p) \end{cases},\begin{cases} y_{۰}=۱ \\ p_{۰}=۰/۵ \end{cases},x_{۰}=۰\ ,\ h=۰/۱$$

$k_{۱}=hf_{۱}(x_{۰},y_{۰},p_{۰})=۰/۱p_{۰}=۰/۰۵\ ,\ L_{۱}=hf_{۲}(x_{۰},y_{۰},p_{۰})=۰/۱(-x_{۰}y_{۰})=۰$

$k_{۲}=hf_{۱}(x_{۰}+\frac{۱}{۳}h,y_{۰}+\frac{۱}{۳}k_{۱},p_{۰}+\frac{۱}{۳}L_{۱})=۰/۱f_{۱}(۰/۰۳۳۳,۱/۰۱۶۷,۰/۵)=۰/۱(۰/۵)=۰/۰۵$

$L_{۲}=hf_{۲}(x_{۰}+\frac{۱}{۳}h,y_{۰}+\frac{۱}{۳}k_{۱},p_{۰}+\frac{۱}{۳}L_{۱})=۰/۱f_{۲}(۰/۰۳۳۳,۱/۰۱۶۷,۰/۵)=۰/۱(-۰/۰۳۳۳)(۱/۰۱۶۷)=-۰/۰۰۳۴$

$k_{۳}=hf_{۱}(x_{۰}+\frac{۲}{۳}h,y_{۰}-\frac{۱}{۳}k_{۱}+k_{۲},p_{۰}-\frac{۱}{۳}L_{۱}+L_{۲})=۰/۱f_{۱}(۰/۰۶۶۷,۱/۰۳۳۳,۰/۴۹۶۶)=۰/۱(۰/۴۹۶۶)=۰/۰۴۹۷$

$L_{۳}=hf_{۲}(x_{۰}+\frac{۲}{۳}h,y_{۰}-\frac{۱}{۳}k_{۱}+k_{۲},p_{۰}-\frac{۱}{۳}L_{۱}+L_{۲})=۰/۱f_{۲}(۰/۰۶۶۷,۱/۰۳۳۳,۰/۴۹۶۶)$

$L_{۳}=۰/۱(-۰/۰۶۶۷)(۱/۰۳۳۳)=-۰/۰۰۶۹$

$k_{۴}=hf_{۱}(x_{۰}+h,y_{۰}+k_{۱}-k_{۲}+k_{۳},p_{۰}+L_{۱}-L_{۲}+L_{۳})=۰/۱f_{۱}(۰/۱,۱/۰۴۹۷,۰/۴۹۶۵)=۰/۱(۰/۴۹۶۵)=۰/۰۴۹۷$

$y_{۱}=y(۰/۱)=y_{۰}+\frac{۱}{۸}k_{۱}+\frac{۳}{۸}k_{۲}+\frac{۳}{۸}k_{۳}+\frac{۱}{۸}k_{۴}=۱/۰۴۹۹$

$T_{۲}=۰/۹۵۶۴۱۸۶۲\ ,\ T_{۴}=۱/۲۱۶۲۸۸۳۶\ ,\ T_{۸}=۱/۲۲۷۶۵۲۵۳$ ۹-

$$S_{۲}=\frac{۴T_{۴}-T_{۲}}{۴-۱}=۱/۳۰۲۹۱۱۶۱\ ,\ S_{۴}=\frac{۴T_{۸}-T_{۴}}{۴-۱}=۱/۲۳۱۴۴۰۵۹\Rightarrow R_{۲}=\frac{۴^{۲}S_{۴}-S_{۲}}{۴^{۲}-۱}=۱/۲۲۶۶۷۵۸۵$$

با مقایسه $R_{۲}$ و $S_{۴}$، مشخص می‌شود که $R_{۲}$ از دقت ۲ رقم اعشار برخوردار است. زیرا خطای مطلق بین آنها در حدود ۰/۰۰۴۸ است که کمتر از ۰/۰۰۵ می‌باشد.

برای $n=۱$ ، هیچ دقتی از لحاظ اعشار وجود ندارد، ولی برای $n=۲$ ، یک رقم اعشار دقت داریم.

$p(x)=\frac{۱}{۶}x^{۲}-\frac{۲}{۳}x+۱\to\int_{۰}^{۲}(\frac{۱}{۶}x^{۲}-\frac{۲}{۳}x+۱)dx=(\frac{۱}{۱۸}x^{۳}-\frac{۱}{۳}x^{۲}+x)\Big|_{۰}^{۲}=\frac{۱۰}{۹}=۱/۱۱۱۱$ ۱۰-

$\int_{۰}^{۲}f(x)dx=\int_{۰}^{۲}\frac{۱}{۱+x}dx=\ln(۱+x)\Big|_{۰}^{۲}=\ln(۳)=۱/۰۹۸۶\to E=۰/۰۱۲۵$