پاسخ امتحان پایان ترم روشهای محاسبات عددی ۹۴/۱۰/۱۲

-۱

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۴ & ۱۲ \\ -۹ & ۶ & -۱۲ & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۲}{۳} & \frac{۴}{۳} & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳۶+k \end{bmatrix} \rightarrow ۳۶+k \neq ۰ \Rightarrow \text{no solution}$$

$$۳۶+k=۰ \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & \frac{-۲}{۳} & \frac{۴}{۳} & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$ جواب خصوصی ، $$\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-۴}{۳} \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$ جوابهای عمومی

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_۱ \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + c_۲ \begin{bmatrix} \frac{-۴}{۳} \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$ جواب کلی

-۲ این دستگاه بدوضع است. زیرا :

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۵} \end{vmatrix} - \frac{۱}{۲} \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۵} \end{vmatrix} + \frac{۱}{۳} \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{۱}{۲۴۰} - \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۶۰}\right) + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۷۲}\right) = \frac{۱}{۲۱۶۰} << \frac{۱}{۵}$$

-۳ قضیه کلاتز را نمی‌توان برای ماتریس B بکار برد. زیرا عناصر آن حقیقی مثبت نیستند.

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۵i & -i \\ ۱-i & ۱+i & ۰ \\ ۰/۱i & ۱ & -i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_۱ : \{\lambda \in C : |\lambda| \leq ۱/۵\} \\ c_۲ : \{\lambda \in C : |\lambda - ۱ - i| \leq \sqrt{۲}\} \\ c_۳ : \{\lambda \in C : |\lambda + i| \leq ۱/۱\} \end{cases}$$

$$\sum_{k=۱}^{۳} |\lambda_k|^۲ \leq ۳/۶ + ۲\sqrt{۲} \rightarrow |\lambda_k| \leq \sqrt{۳/۶ + ۲\sqrt{۲}} \simeq ۲/۵۴$$

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_۱ : \{\lambda \in C : |\lambda - ۱| \leq ۵\} \\ c_۲ : \{\lambda \in C : |\lambda - ۴| \leq ۸\} \\ c_۳ : \{\lambda \in C : |\lambda - ۱| \leq ۹\} \end{cases}, \quad \sum_{k=۱}^{۳} |\lambda_k|^۲ = ۱۱۶ \rightarrow |\lambda_k| \leq \sqrt{۱۱۶} \simeq ۱۰/۷۷$$

$$x = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \rightarrow y = Bx = \begin{bmatrix} ۱۴ \\ ۲۸ \\ ۱۸ \end{bmatrix} \rightarrow q_۱ = q_۲ = ۱۴, q_۳ = ۶ \Rightarrow \exists \lambda \in [۶, ۱۴]$$

-۴

$$(D-\lambda I)x=۰\xrightarrow{\lambda=۱}\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&-۱&-۱\\۰&۱&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\end{bmatrix}=۰\rightarrow\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\-۱&-۱&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۲\\x_۳\\x_۱\end{bmatrix}=۰\rightarrow\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\۰&-۲&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۲\\x_۳\\x_۱\end{bmatrix}=۰$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}۱&-۱&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۲\\x_۳\\x_۱\end{bmatrix}=۰\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۲\\x_۳\\x_۱\end{bmatrix}=۰\rightarrow x_۱=۱,\ x_۳=۰,\ x_۲=۰\Rightarrow\begin{bmatrix}۱\\۰\\۰\end{bmatrix}$$

$$(D-\lambda I)x=۰\xrightarrow{\lambda=i}\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۰&-۱&۰&۱&۰\\۰&۱&۰&۰&۰&۱\\-۱&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&-۱&۰&۰&۰&-۱\\۰&۰&-۱&۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\\y_۱\\y_۲\\y_۳\end{bmatrix}=۰\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۰&-۱&۰&۱&۰\\۰&۱&۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۰&۲&۰&۰\\۰&-۱&۰&۰&۰&-۱\\۰&۰&-۱&۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\\y_۱\\y_۲\\y_۳\end{bmatrix}=۰$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۱&۰&۰&۰&۱\\۰&۰&-۱&۰&۱&۰\\۰&۰&۰&۲&۰&۰\\۰&-۱&۰&۰&۰&-۱\\۰&۰&-۱&۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\\y_۱\\y_۲\\y_۳\end{bmatrix}=۰\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۱&۰&۰&۰&۱\\۰&۰&-۱&۰&۱&۰\\۰&۰&۰&۲&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&۰&۰\\۰&۰&-۱&۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\\y_۱\\y_۲\\y_۳\end{bmatrix}=۰\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۱&۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۱&۰&-۱&۰\\۰&۰&۰&۲&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\\y_۱\\y_۲\\y_۳\end{bmatrix}=۰\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۱&۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۱&۰&-۱&۰\\۰&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\\y_۱\\y_۲\\y_۳\end{bmatrix}=۰\rightarrow\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۱&۰&-۱&۰\\۰&۰&۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱\\x_۲\\x_۳\\y_۱\\y_۲\\y_۳\end{bmatrix}=۰$$

$$\begin{cases}y_۲=۱, y_۳=۰\rightarrow x_۱=x_۲=y_۱=۰, x_۳=۱\\ y_۳=۱, y_۲=۰\rightarrow x_۱=x_۳=y_۱=۰, x_۲=-۱\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}۰\\i\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰\\-۱\\i\end{bmatrix}\Rightarrow p=\begin{bmatrix}۰\\i\\۱\end{bmatrix},\ \lambda=-i\Rightarrow p=\begin{bmatrix}۰\\-i\\۱\end{bmatrix}$$

-۵

$$\begin{cases}x-e^{y}=۰=f\\ e^{-x}+y=۰=g\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=۱,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-e^{y}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}=-e^{-x},\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=۱\end{cases}\rightarrow\begin{cases}h_n-k_ne^{y_n}=-(x_n-e^{y_n})\\ -h_ne^{-x_n}+k_n=-(e^{-x_n}+y_n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}h_n-k_ne^{y_n}=-(x_n-e^{y_n})\\ -h_ne^{-x_n}+k_n=-(e^{-x_n}+y_n)\end{cases}\quad h_n=\frac{\begin{vmatrix}-(x_n-e^{y_n}) & -e^{y_n}\\ -(e^{-x_n}+y_n) & ۱\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱ & -e^{y_n}\\ -e^{-x_n} & ۱\end{vmatrix}}=\frac{-x_n-e^{-x_n+y_n}+(۱-y_n)e^{y_n}}{۱-e^{-x_n+y_n}}$$

$$k_n=\frac{\begin{vmatrix} ۱ & -(x_n-e^{y_n}) \\ -e^{-x_n} & -(e^{-x_n}+y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & -e^{y_n} \\ -e^{-x_n} & ۱ \end{vmatrix}}=\frac{-y_n+e^{-x_n+y_n}-(۱+x_n)e^{-x_n}}{۱-e^{-x_n+y_n}}$$

$$\begin{cases} x_. =۱ \\ y_. =۰ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۱ =۰/۴۱۸ \\ y_۱ =-۰/۵۸۲ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۲ =۰/۵۷۳ \\ y_۲ =-۰/۵۵۶ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۳ =۰/۵۶۷ \\ y_۳ =-۰/۵۶۷ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x_۴ =۰/۵۶۷ \\ y_۴ =-۰/۵۶۷ \end{cases}$$

۶- نقطه دوم یعنی $x=۰/۵, y=-۰/۵$ مناسب است. زیرا :

$$\begin{cases} x=e^y=f_۱ \\ y=-e^{-x}=f_۲ \end{cases},\ \left|\frac{\partial f_۱(x,y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f_۱(x,y)}{\partial y}\right|=e^y<۱\quad,\quad \left|\frac{\partial g_۱(x,y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial g_۱(x,y)}{\partial y}\right|=e^{-x}<۱\rightarrow x>۰, y<۰$$

$$\begin{cases} x=۰/۵ \\ y=-۰/۵ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=۰/۶۰۷ \\ y=-۰/۶۰۷ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=۰/۵۴۵ \\ y=-۰/۵۴۵ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=۰/۵۸۰ \\ y=-۰/۵۸۰ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=۰/۵۶۰ \\ y=-۰/۵۶۰ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=۰/۵۷۱ \\ y=-۰/۵۷۱ \end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{cases} x=۰/۵۶۵ \\ y=-۰/۵۶۵ \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=۰/۵۶۸ \\ y=-۰/۵۶۸ \end{cases}$$

۷- $y=ax+be^x\rightarrow f_۱=x\ , f_۲=e^x$

$$F=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & e \\ ۲ & e^۲ \end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\rightarrow F^TF=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & e & e^۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & e \\ ۲ & e^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & e+۲e^۲ \\ e+۲e^۲ & ۱+e^۲+e^۴ \end{bmatrix}$$

$$F^Ty=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & e & e^۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲+e \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} ۵ & e+۲e^۲ \\ e+۲e^۲ & ۱+e^۲+e^۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲+e \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲/۲۲ \\ ۰/۶۹ \end{bmatrix}$$

$$x=۰\rightarrow y=۰/۶۹\ , x=۱\rightarrow y=-۰/۳۴\ , x=۲\rightarrow y=۰/۶۶\rightarrow\sum_{j=۱}^{۳}\lambda_j^۲=۳/۹۵$$

۸-

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{x}{۲\sqrt{ax+b}},\frac{\partial f}{\partial b}=\frac{۱}{۲\sqrt{ax+b}}\rightarrow F=\begin{bmatrix} ۰ & ۰/۵ \\ \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} & \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} \end{bmatrix},y=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳-\sqrt{۲} \\ ۴-\sqrt{۳} \end{bmatrix},C=\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix}$$

$$F^TF=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ ۰/۵ & \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} & \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰/۵ \\ \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} & \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱۱}{۲۴} & \frac{۷}{۲۴} \\ \frac{۷}{۲۴} & \frac{۱۱}{۲۴} \end{bmatrix},F^Ty=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ ۰/۵ & \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} & \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳-\sqrt{۲} \\ ۴-\sqrt{۳} \end{bmatrix}$$

$$F^{T}y=\begin{bmatrix}\frac{۱/۵}{\sqrt{۲}}+\frac{۴}{\sqrt{۳}}-۱/۵\\ \frac{۱/۵}{\sqrt{۲}}+\frac{۲}{\sqrt{۳}}-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱/۸۷۰\\ ۱/۲۱۵\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\frac{۱۱}{۲۴} & \frac{۷}{۲۴}\\ \frac{۷}{۲۴} & \frac{۱۱}{۲۴}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱/۸۷۰\\ ۱/۲۱۵\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴/۰۲۱\\ ۰/۰۹۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵/۰۲۱\\ ۱/۰۹۳\end{bmatrix}$$

۹-

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۲\\ ۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\end{bmatrix}\to A'=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\to\begin{cases}y_{۱}+y_{۲}\le ۳\\ y_{۱}-۲y_{۲}\le ۱\\ -۲y_{۱}+y_{۲}\le ۲\end{cases}, f=y_{۱}-y_{۲}$$

$$\begin{cases}y_{۱}+y_{۲}+u=۳\\ y_{۱}-۲y_{۲}+v=۱\\ -۲y_{۱}+y_{۲}+w=۲\end{cases}\to\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۳\\ \boxed{۱} & -۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ -۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲\\ \boxed{-۱} & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۰ & \boxed{۳} & ۱ & -۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & -۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۳ & ۰ & ۲ & ۱ & ۴\\ ۰ & \boxed{-۱} & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{-۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳}\\ ۰ & -۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۳ & ۰ & ۲ & ۱ & ۴\\ ۰ & \boxed{-۱} & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{-۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳}\\ ۱ & ۰ & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۷}{۳}\\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۶\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & \frac{۵}{۳}\end{bmatrix}\to\begin{cases}x_{۱}=\frac{۱}{۳}, x_{۲}=\frac{۲}{۳}, x_{۳}=۰\\ z_{min}=\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

۱۰-

$$V=\pi R^{۲}h=۱۰۰\to\pi R^{۲}h-۱۰۰=۰\quad,\quad S=۲\pi Rh+۲\pi R^{۲}\to$$

$$L=۲\pi Rh+۲\pi R^{۲}-\lambda(\pi R^{۲}h-۱۰۰)\to\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial R}=۲\pi h+۴\pi R-۲\lambda\pi Rh=۰\\ \frac{\partial L}{\partial h}=۲\pi R-\lambda\pi R^{۲}=۰\\ \frac{\partial L}{\partial\lambda}=-(\pi R^{۲}h-۱۰۰)=۰\end{cases}\to\begin{cases}h+۲R-\lambda Rh=۰\\ \lambda=\frac{۲}{R}\\ \pi R^{۲}h-۱۰۰=۰\end{cases}$$

$$h+۲R-\frac{۲}{R}Rh=۰\to h=۲R\to\pi R^{۲}۲R-۱۰۰=۰\Rightarrow R=\sqrt[۳]{\frac{۵۰}{\pi}}\simeq ۲/۵۲, h=۵/۰۳$$