۱-سیستم $x(t \bmod 9)$ خطی است زیرا:

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t \bmod 9), x_2(t) \to y_2(t) = x_2(t \bmod 9)$$

طبق خاصیت جمع پذیری در سیستم های خطی داریم:

$$x = ax_1 + bx_2 \to y(t) = x(t \bmod 9) = ax_1(t \bmod 9) + bx_2(t \bmod 9) = ay_1 + by_2$$

سیستم $x(t \bmod 9)$ متغیر با زمان است زیرا :

$$x \to y(t) = x(t \bmod 9), x_1 \to y_1(t) = x_1(t \bmod 9)$$
$$x_1(t) = x(t - t_0) \to y_1(t) = x((t \bmod 9) - t_0) \neq x((t - t_0) \bmod 9) = y(t - t_0)$$

مقدار پاسخ در هر لحظه به مقادیری از ورودی در فاصله زمانی ۰ تا ۹ بستگی دارد. پس سیستم حافظه دار است. سیستم علی نیست . زیرا به عنوان مثال داریم: $y(-9) = x(-9 \bmod 9) = y(0)$ که یعنی برای بدست آوردن مقدار سیگنال $y(-9)$ نیاز به مقدار آن در آینده یعنی لحظه ۰ داریم.سیستم معکوس پذیر نیست زیرا درپاسخ فقط مقادیری ازورودی در فاصله زمانی ۰ تا ۹ وجود دارد و در خروجی ، ورورديهای خارج از این بازه دخالت ندارند و نمیتوان آنها را بازسازی نمود. سیستم پایدار است. زیرا خروجی مستقیما از ورودی تعیین میشود که محدود است.

- سیستم خطی نیست. زیرا خاصیت ترازبندی را ندارد:

$$y(n) = [x(n+1)] : x(n) = 2.5u(n+1) \to y_1(n) = 2u(n+2)$$
$$a = 2, ax(n) = 5u(n+1) \to y_2(n) = 5u(n+2) \neq 2[2.5u(n+2)] = 4u(n+2)$$

سیستم با حافظه و غیر علی است. زیرا مثلا در مقدار $n = 1$ مقدار $[x(2)]$ برای آینده است و باید جایی ذخیره شود.

سیستم معکوس پذیر نیست زیرا مثلا برای ورودی های متفاوت $\begin{matrix} x_1(n) = u(n+1) \\ x_2(n) = 1.3u(n+1) \end{matrix}$ خروجی یکسان $u(n+2)$ داریم.

سیستم پایدار است. زیرا تغییر در n روی پایداری اثر ندارد و کران آن با جزء صحیح باز هم مقداری صحیح است :

$$|x(n)| < M \rightarrow |x(n+1)| < M \rightarrow |[x(n+1)]| < M$$

سیستم غیرمتغیر با زمان است. زیرا:

$$y(n) = [x_1(n+1)], x_2(n) = x_1(n-n_0) \rightarrow y_2(n) = [x_2(n)] = [x_1(n-n_0)] = y_1(n-n_0)$$

- برای سیستم $y(t) = \frac{x(n)}{x(5)}$ داریم:

این سیستم خطی نیست زیرا $x_1(t) = ax(t) \rightarrow y_1(t) = \frac{ax(n)}{ax(5)} = y(b) \neq ay(n)$

این سیستم متغیر با زمان است. زیرا:

$$x_1(n) \rightarrow y_1(n) = \frac{x_1(n)}{x_1(5)}, x_2(n) = x_1(n-n_0) \rightarrow y_2(n) = \frac{x_2(n)}{x_2(5)} = \frac{x_1(n-n_0)}{x_1(5-n_0)} \neq y_1(n-n_0) = \frac{x_1(n-n_0)}{x_1(5)}$$

این سیستم حافظه دار است. چون مقدار y در هر لحظه به مقدار $x(5)$ بستگی دارد پس باید آن را ذخیره کرده باشیم.

این سیستم ّعلی نیست. زیرا مقدار y در هر n منفی به مقدار x در n پنج (آینده) بستگی دارد.

این سیستم پایدار نیست. زیرا اگر $x(5)$ صفر باشد، پاسخ بینهایت میشود.

این سیستم معکوس پذیر نیست. زیرا:

نمیتوان مقدار $x(5)$ را یافت. چون مقدار y در لحظه ۵ یک است و مقدار $x(5)$ هر مقدار غیر صفری میتواند باشد.

- سیستم تغییر ناپذیر با زمان است زیرا:

$$x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) = x_1(t-t_0) \to y_2(t) = x_1{}'(t-t_0) = y_1(t-t_0)$$

سیستم معکوس ناپذیر است زیرا به ازای دو ورودی $x_1(t) = 1, x_2(t) = 2$ خروجی برابر است با ۰.

سیستم خطی است ، زیرا دامنه ورودی با خروجی متناسب است و خاصیت جمع پذیری دارد :

$$x_1(t) \to y_1(t) = x'_1(t)$$
$$ax_1(t) \to ax'_1(t) = ay_1(t)$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = x'_2(t)$$
$$bx_2(t) \to bx'_2(t) = by_2(t)$$
$$ax_1(t) + bx_2(t) \to (ax_1(t) + bx_2(t))' = ay_1(t) + by_2(t) = ax'_1(t) + bx'_2(t)$$

نکته: دقت کنید ما همیشه برای تشخیص خواص سیگنال ها به $x(t)$ دقت می کنیم ، مثلا اگر از ما بپرسند ایا $\sin(t)x(t)$ حافظه دار است باید بگوییم خیر و نباید بگوییم مقدار سینوس را جایی ذخیره کرده باشیم چون فقط و فقط $x(t)$اهمیت دارد ، حال میخواهیم ببینیم که ایا $x'(t)$ حافظه دار است یا خیر ، سیگنال $x(t)$ مشابه $x'(t)$ نیست چون یک بلایی سر سیگنال آمده و مشتقش بدست آمده و ما با خود $x(t)$ کار داریم نه $x'(t)$ پس تعریف مشتق را می نویسیم :

راه اول :

با توجه به تعریف مشتق داریم :

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

چیزی که آبی شده است نشان می دهد که سیگنال به آینده اشاره میکند پس علی نیست. پس حافظه دار هم هست چون باید آن را ذخیره کرده باشیم .

راه دوم :

در چند خط بالاتر اثبات کردیم که این سیگنال تغییر ناپذیر با زمان و همچنین خطی است . پس LTI است. پس می توانیم پاسخ به ضربه اش را بدست آوریم. یعنی اگر بجای $x(t)$ ضربه بگذاریم، $y(t)$ که همان پاسخ به ضربه است چه می شود ؟ که می فهمیم برابر می شود با $\delta'(t)$ که به فرم $A\delta(t)$ نیست پس حافظه دار است.

سیستم ناپایدار است زیرا اگر $x(t)=u(t)\rightarrow\frac{dx(t)}{dx}=\delta(t)$ که می دانیم سیگنال ضربه در لحظه ۰ به بینهایت می رود که نشان می دهد سیستم ناپایدار است. دقت کنید که برای اثبات ناپایداری میتوانیم از مثال نقض استفاده کنیم ، همیشه نباید با کران اثبات مستقیم شود که چیزی پایدار یا ناپایدار است.

نکته : برای سیگنال هایی که داخل یک $\sum$ ، انتگرال (می تواند Real یا Image هم داشته باشد) ، مشتق یا هر اپراتور دیگری باشند ، استفاده از مثال نقض معمولا با توابعی مانند پله و ضربه خیلی تاثیر گذار است. (سوال اول میانترمهای ۹۷ و ۹۶ و ۹۴ و ۹۲) ولی همیشه درست نیست. بر فرض مثال سوال ۱ میانترم بهار ۴۰۲ .

-۲

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^{۲}dt=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^{۲}dt=\int_{-\infty}^{\infty}۱^{۲}dt=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\int_{-T}^{T}۱^{۲}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}*۲T=۱$$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^{۲}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{|t|^{۲}}dt=۲\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{t^{۲}}dt=۲\left(\frac{-۱}{t}\Big|_{۰}^{\infty}\right)=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\int_{-T}^{T}\frac{۱}{|t|^{۲}}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{T}\int_{۰}^{T}\frac{۱}{t^{۲}}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{T}\frac{-۱}{t}\Big|_{۰}^{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{T}\left(\frac{-۱}{T}+\infty\right)=\infty$$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^{۲}dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\cos(t)|^{۲}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱+\cos(۲t)}{۲}dt=\left(\frac{\sin(۲t)}{۴}+\frac{t}{۲}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\frac{t}{۲}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sin(۲t)}{۴}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\infty+\text{not defined}=\text{not energy signal}$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\int_{-T}^{T}|\cos(t)|^{۲}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\int_{-T}^{T}\frac{۱+\cos(۲t)}{۲}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\left(\frac{\sin(۲t)}{۴}+\frac{t}{۲}\right)\Big|_{-T}^{T}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\left(\frac{T}{۲}+\frac{\sin(۲T)}{۴}\right)-\left(\frac{\sin(-۲T)}{۴}-\frac{T}{۲}\right)=\frac{۱}{۲T}(T)=\frac{۱}{۲}+\frac{\sin(\infty)}{۴(\infty)}=\frac{۱}{۲}+۰=\frac{۱}{۲}$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^{۲}dt=\int_{۰}^{\infty}e^{-۲at}dt=\frac{-۱}{۲a}\left(e^{-۲at}\Big|_{۰}^{\infty}\right)=\frac{۱}{۲a}$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\int_{۰}^{T}e^{-۲at}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\frac{-۱}{۲a}\left(e^{-۲at}\right)\Big|_{۰}^{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\frac{-۱}{۲a}\left(e^{-۲aT}-۱\right)=۰$$

۳-الف- دوره تناوب $\cos(t)$ برابر 2π و دوره تناوب $\cos(\pi t)$ برابر ۲ است. لذا این دو تابع پریود مشترک ندارند و $x(t)$ متناوب نیست .همچنین مخرج نامتناوب است.

ب- هر دو سیگنال در این قسمت دارای یک دوره تناوب صحیح نیستند و لذا سیگنال x متناوب نیست .

$$\cos(n) \to T_1 = 2\pi \notin N, T_2 = \pi \notin N$$

پ-اثبات شد که سیگنال $y(t) = x'(t)$ خطی است حال اگر با یک عدد ثابت جمع شود خطی افزایشی است.

-۴

$$x(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) - 1\delta(n-1) + 0 + 1\delta(n-3)$$

-۵

الف-می دانیم برای اینکه بفهمیم سیگنال پاسخ به ضربه ما معکوس پذیر است یا خیر باید ببینیم آیا سیگنالی وجود دارد که * آن با سیگنال ما برابر با تابع ضربه باشد؟ طبق حل زیر می بینیم که سیگنال جواب برابر پله است. پس به معکوس رسیدیم.

$$u_1(t) = \delta'(t) \to g(t) * \delta'(t) = \delta(t)$$
$$\to g(t) = u(t)$$

ب–علی نیســت زیرا در لحظه های قبل ۰ مقدار آن مخالف ۰ اســت . مثلا در $t=-۱$ مقدار تابع پله برابر با ۱ است و کسینوس ۱ مخالف ۰ است .

پ– به فرم $A\delta(t)$ نیست پس حافظه دار است.

ج–پاسخ به پله طبق جزوه یعنی * $h(t)$ با پله. پس فرمول * پیوسته را می نویسیم.

$$u(t)*e^{-at}u(t)=$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t-\tau)e^{-a\tau}u(\tau)d\tau \rightarrow y(t)=\int_{۰}^{t}۱.e^{-a\tau}d\tau$$

$$=\frac{-۱}{a}e^{-a\tau}\Big|_{۰}^{t}=\frac{-۱}{a}[e^{-at}-۱]$$

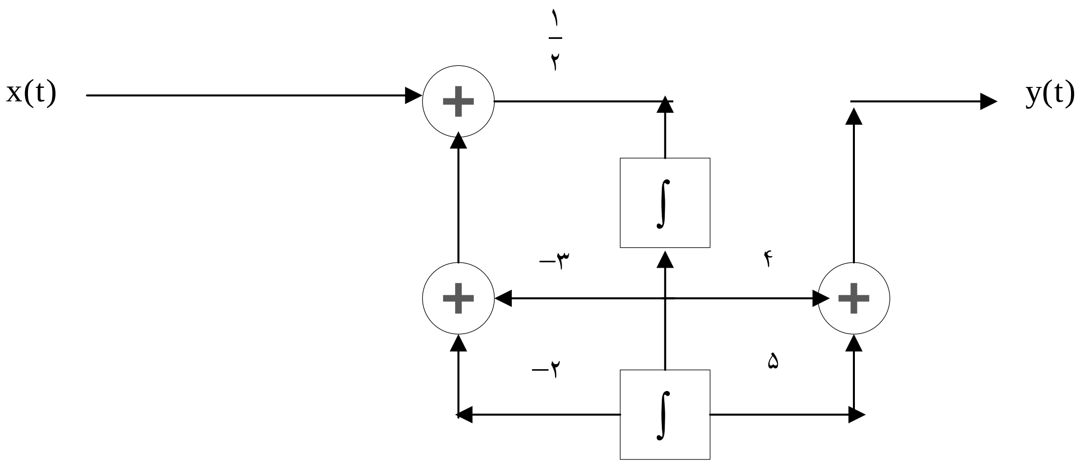
د– به فرم $A\delta(n)$ نیست پس حافظه دار است.

برای بررسی پایداری باید $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|$ محدود باشد پس آن را بررسی می کنیم.

پایدار است. زیرا:

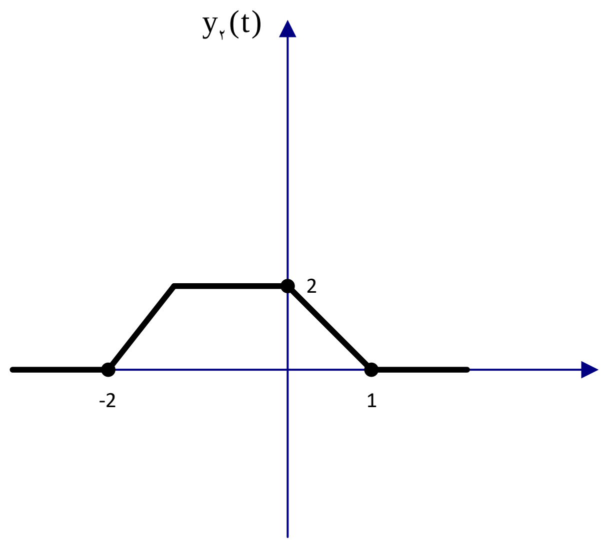
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|۴^{n}u(۲-n)|=\sum_{n=-\infty}^{۲}|۴^{n}|=\sum_{n=-۲}^{\infty}۴^{-n}=\frac{۱۶((\frac{۱}{۴})^{\infty}-۱)}{\frac{۱}{۴}-۱}=\frac{-۱۶}{\frac{-۳}{۴}}=\frac{۶۴}{۳}$$

۶–



۷–

$$x_{۲}(t) = x_{۱}(t) + x_{۱}(t+۱) \rightarrow y_{۲}(t) = y_{۱}(t) + y_{۱}(t+۱)$$



۸–

$$y(n) = \varepsilon_{v}\{x(n)\} = \frac{x(n) + x(-n)}{٢}$$

$$x(n) \to ax_{١}(n) + bx_{٢}(n) \to y(n) = \frac{ax_{١}(n) + bx_{٢}(n) + ax_{١}(-n) + bx_{٢}(-n)}{٢}$$

$$y(b) = ay_{١}(n) + by_{٢}(n) \to \text{linear}$$

$$x(n) \to x(n - n_{٠}) \Rightarrow y(n) = \frac{x(n - n_{٠}) + x(-n - n_{٠})}{٢} \neq y(n - n_{٠}) \to \text{TV}$$