۱-الف-

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \rightarrow x(-۲t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-۲jn\omega_0 t}$$

با تغییر متغیر $n=-k$ داریم:

$$y(t)=x(-۲t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{۲jk\omega_0 t}$$

متوجه می شویم رابطه $b_k = c_{-k}$ برقرار است . از این رو $b_{-۲}$ همان $\frac{۱}{۵}$ است.

ب-

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \rightarrow x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c^*_n e^{(jn\omega_0 t)^*} \rightarrow x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c^*_n e^{-jn\omega_0 t}$$

با تغییر متغیر $n=-k$ داریم:

$$x^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c^*_{-k} e^{jk\omega_0 t} \rightarrow x^*(-t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c^*_{-k} e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_{-k} e^{jk\omega_0 t})^*$$
$$= x^*(-t)$$

متوجه می شویم که دو طرف * حذف می شود پس انگار دوباره برگشتیم به مورد ب یعنی همان $x(-t)$ ضریب به c_{-k} تغییر می کند. ۳ برابر شدن سیگنال اصلی به دلیل وارد شدن ۳ به زیگما ، ضریب را ۳ برابر می کند . پس $۳c_{-k}$ ضریب جدید است.

۲-به مدل سینک هم جواب نوشته شود صحیح است .

$$C_n = \frac{۱}{T} X(\omega)|_{\omega=n\omega_۰} \Rightarrow T = ۱۰\pi$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t}dt = \frac{۱}{j\omega} e^{j\omega t} |_{-\pi}^{\pi} = \frac{(e^{j\omega\pi} - e^{-j\omega\pi})}{j\omega}$$

$$C_n = \frac{۱}{۱۰\pi} \frac{(e^{jn\omega_۰\pi} - e^{-jn\omega_۰\pi})}{jn\omega_۰}$$

$$C_n = \frac{۱}{۲\pi} \frac{(e^{\frac{jn\pi}{۵}} - e^{\frac{-jn\pi}{۵}})}{jn}$$

۳-

الف- $e^{-a|t|} \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{۲a}{\omega^۲ + a^۲}$

از خاصیت دوگان استفاده می کنیم و تبدیل فوریه را بدست می آوریم:

$$\frac{۶}{t^۲ + \omega^۲} \xrightarrow{\text{duality}} ۲\pi e^{-۳|-\omega|} = ۲\pi e^{-۳|\omega|}$$

ب-

$$\frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = x'(t) \to \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega)d\omega = -۲\pi j x'(۰) = ۰$$

پ-

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} ۱dt = \infty$$

چون شرط دیریکله برقرار نیست پس نمی توان پاسخ فرکانسی برای این سیستم تعریف کرد، همچنین چون حاصل انتگرال مقداری متناهی نشد پس پایدار نیست.

-۴

$$sY(s)-y(۰^{+})+۲Y(s)=\frac{۱}{s+۱}\rightarrow Y(s)=\frac{۱}{s+۱}\rightarrow y(t)=e^{-t}u(t)$$

-۵

الف-ضریب ۲ نقشی ندارد.

$$u(t)\xrightarrow{\text{Laplace}}\frac{۱}{s}$$

$$u'(t)=\delta(t)\xrightarrow{\text{Laplace}}s\frac{۱}{s}=۱$$

$$\delta''(t)=(\delta(t))''=s^{۲}.۱=s^{۲}$$

$$\delta''(t-2)=e^{-۲s}s^{۲}\rightarrow \text{ROC}=\text{Whole}\quad S$$

$$۲\delta''(t-۲)=۲e^{-۲s}s^{۲}$$

ب- از خاصیت انتگرال در حوزه زمان استفاده می کنیم.

$$\int_{-\infty}^{t}u(\upsilon)d\upsilon\xrightarrow{\text{laplace}}\frac{۱}{s}X(s)=\frac{۱}{s}\frac{۱}{s}=\frac{۱}{s^{۲}}$$

$$R\cap\{\mathrm{Re}(s)>۰\}$$

پ- طبق مورد قبل متوجه شدیم که انتگرال تابع ramp در حوزه زمان که همان $r(t)$ است به ما لاپلاس $\frac{۱}{s^{۲}}$ می دهد. اگر بخواهیم از خاصیت کانولوشن انجام دهیم داریم:

و چون انتقال در حوزه زمان ناحیه همگرائی را تغییر نمی دهد ، مانند مورد ب ناحیه همگرایی ثابت است

$R \cap \{Re(s) > ۰\}$

$$x_۱(t) * x_۲(t) \to X_۱(s) X_۲(s) = \frac{۱}{s^۲}$$

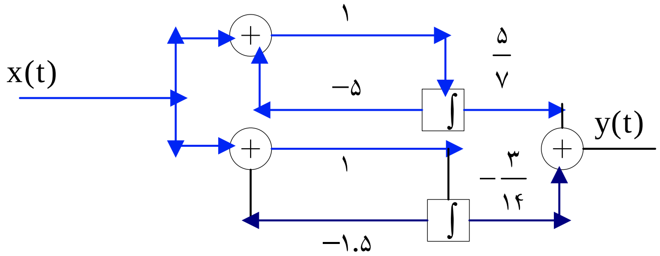
$$r(t+۳) \xrightarrow[\text{laplace}]{} \frac{e^{۳s}}{s^۲}$$

$$r(۵t+۳) \xrightarrow[\text{laplace}]{} \frac{۱}{|۵|} \frac{e^{\frac{۳s}{۵}}}{(\frac{s}{۵})^۲} = ۵ \frac{e^{\frac{۳s}{۵}}}{s^۲}$$

۶-

الف-

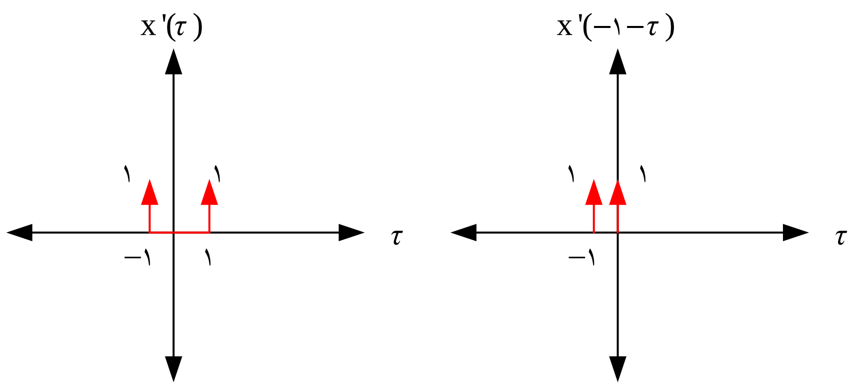
$$H(s) = \frac{\frac{۵}{۷}}{s+۵} - \frac{\frac{۳}{۷}}{۲s+۳}$$



ب- این سیستم پاسخ فرکانسی ندارد. زیرا ناحیه همگرایی تابع تبدیل شامل محور موهومی نیست.

پ-این سیستم پایدار نیست. زیرا پاسخ به ضربه سیستم ، $\text{left}-\text{sided}$ بوده و در $t=-\infty$ ، بینهایت می شود.

۷-اشتراک این دو سیگنالی که برای کانولوشن هستند از منفی بینهایت تا بینهایت فقط در نقطه تی = منفی یک است که کلا یک ضربه دارد و برابر است با ۱ که ضرب در منفی دوپی بشود برابر منفی دو پی است.



$$x(t) \to X(j\omega)$$
$$x'(t) \to j\omega X(j\omega)$$
$$x'(t) * x'(t) \to j\omega X(j\omega).j\omega X(j\omega) = -\omega^{۲} X^{۲}(j\omega)$$
$$-۲\pi x'(t) * x'(t)|_{t=-۱} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{۲} X^{۲}(j\omega) e^{-j\omega}$$
$$-۲\pi \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau) x'(۱-\tau) d\tau = -۲\pi$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^{۲} dt = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^{۲}\, d\omega$$
$$\to ۲\pi \int_{-۱}^{۱} ۱^{۲} dt = ۲\pi.۲ = ۴\pi$$

$$H(s)=\frac{۸}{(۲+s^{۲})}.\frac{s}{s+(k-۱)}=\frac{۸s}{(۲+s^{۲})}.\frac{۱}{(s-۱)+k}=\frac{۸s}{۲s-۲+۲k+s^{۳}-s^{۲}+ks^{۲}}$$

$$s^{۳}+s^{۲}(k-۱)+۲s+۲k-۲=۰$$

$$\begin{array}{ll} s^{۳}:۱ & ۲ \\ s^{۲}:k-۱ & ۲k-۲ \\ s^{۱}:۲(k-۱)-۲k+۲=۰ & ۰ \\ s^{۰}:۰ & ۰ \end{array}$$

شرایط لازم برای میرا شونده بودن یا پایداری این است که اعداد تمام ستون ها هم علامت باشند تا همگی قطب ها در LHP واقع باشند :

$$\begin{cases} k-۱>۰\rightarrow k>۱ \\ ۲k-۲>۰\rightarrow k>۱ \end{cases}\rightarrow k>۱$$

پس شرط پایداری $k>۱$ است برای $k=۱$ خواهیم داشت :

$$A(s)=s^{۲}(k-۱)+۲k-۲=۰$$

با یک فاکتور گیری ساده داریم :

$$A(s)=(k-۱)(s^{۲}+۲)=۰$$

$$s^{۲}+۲=۰\rightarrow s=\pm۲j$$

$$\frac{dA}{ds}=\lim_{k\to۱^{+}}۲s(k-۱)=۲s$$

زیرا باید کا از یک کمی بیشتر باشد تا کل ستون هم علامت نیز شوند.جواب نهائی:

$$
\begin{array}{ll}
s^3 : 1 & 2 \\
s^2 : k-1 & 2k-2 \\
s^1 : 2(k-1) & 0 \\
s^0 : 0 & 0
\end{array}
$$

۹- سری یعنی ضرب کردن دو سیستم ، موازی یعنی جمع کردن. ضرب این دو سیستم در حوزه فرکانس مارا به سیستم ۱ یا یکه می رساند چون یکی معکوس دیگری است. که معکوس تابع یکه سیگنال ضربه است پس ناحیه همگرایی ان کل صفحه است نه اشتراک ناحیه همگرایی این دو سیستم زیرا حذف صفر و قطب رخ می دهد و نمی توانیم اشتراک بگیریم(اگر دو تابع تبدیل کسری باشند در غیر این صورت نمیتوان صحبت نمود)

ب- بله چون ناحیه همگرایی ضربه کل صفحه است و شامل محور $j\omega$ است پس فوریه دارد.(اگر دو تابع تبدیل کسری باشند)