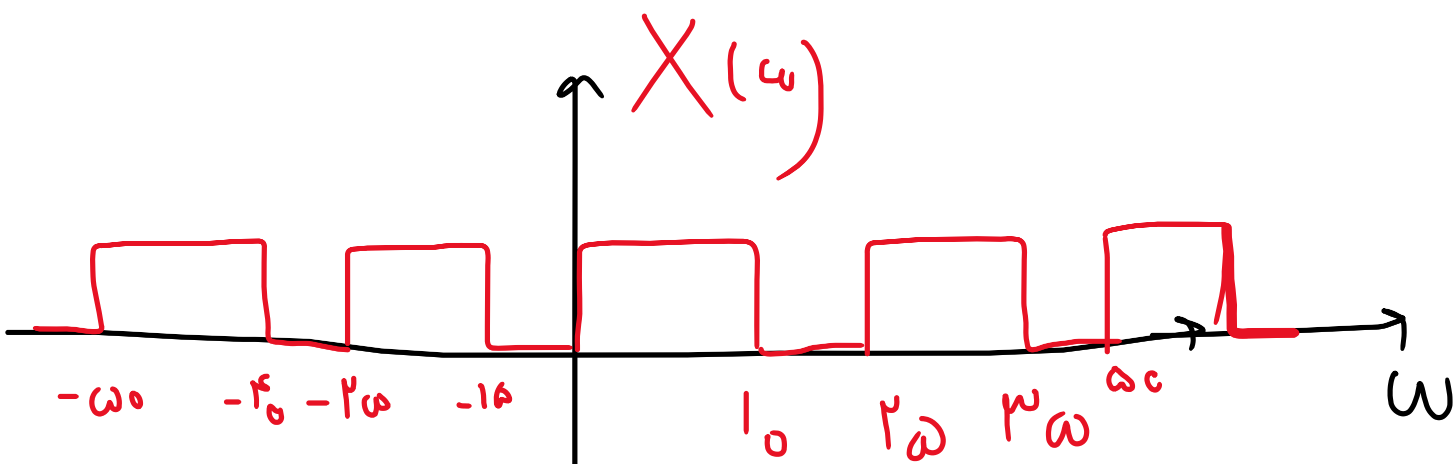
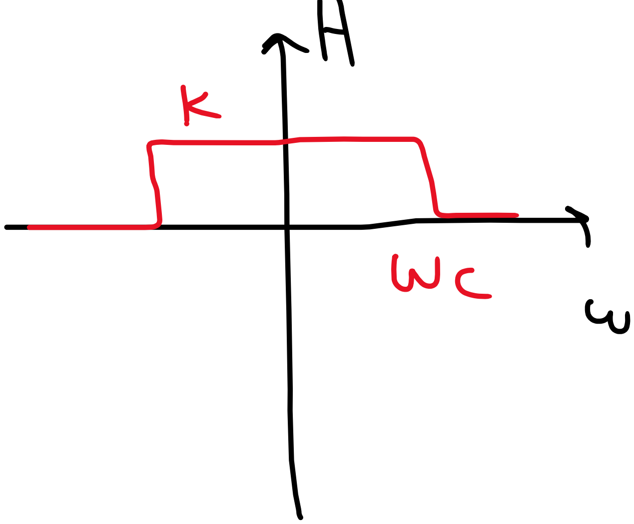
۱- بالاترین مولفه فرکانسی سیگنال ۱۰ است و فرکانس نمونه برداری برابر ۲۵ که بیش از دو برابر آن است، می باشد. پس می توان سیگنال نمونه برداری شده را بازسازی کرد.

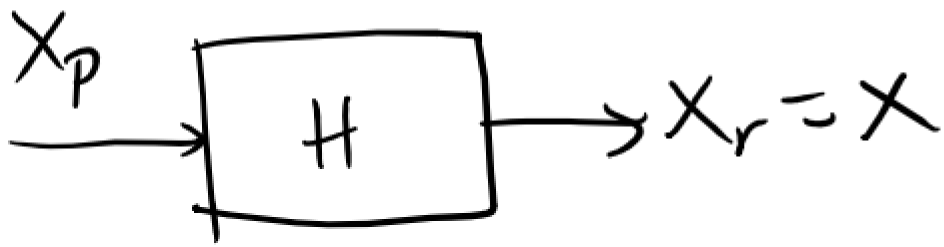
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 25 \rightarrow T = 0/08\pi \rightarrow \frac{1}{T} = \frac{12.5}{\pi} \rightarrow X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$



بطوریکه:

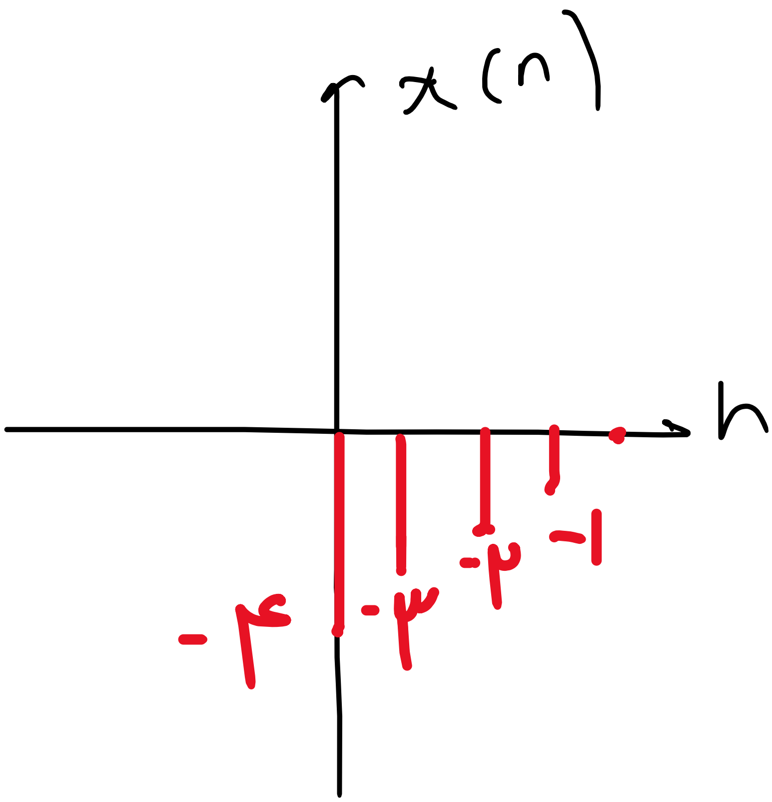
$$10 \leq \omega_c \leq 25, k = T = 0.08\pi$$





۲-

$N = N_۱ = ۵$



$$\tilde{X}(k)=\frac{۱}{N}\sum_{n=۰}^{N-۱}x(n)e^{-jk\frac{۲\pi}{N}n}=\frac{۱}{۵}\sum_{n=۰}^{۴}x(n)e^{-jk\frac{۲\pi}{۵}n}$$

$$=\frac{۱}{۵}(-۴+x(۱)e^{-jk\frac{۲\pi}{۵}}+x(۲)e^{-jk\frac{۴\pi}{۵}}+x(۳)e^{-jk\frac{۶\pi}{۵}}+۰)$$

$$\rightarrow\tilde{X}(0)=\frac{۱}{۵}(-۴-۳-۲-۱+۰)=-۲$$

$$\tilde{X}(1)=\frac{۱}{۵}(-۴-۳e^{-j\frac{۲\pi}{۵}}-۲e^{-j\frac{۴\pi}{۵}}-e^{-j\frac{۶\pi}{۵}})$$

$$\tilde{X}(2)=\frac{۱}{۵}(-۴-۳e^{-j\frac{۴\pi}{۵}}-۲e^{-j\frac{۸\pi}{۵}}-e^{-j\frac{۱۲\pi}{۵}})$$

$$\tilde{X}(3)=\frac{۱}{۵}(-۴-۳e^{-j\frac{۶\pi}{۵}}-۲e^{-j\frac{۱۲\pi}{۵}}-e^{-j\frac{۱۸\pi}{۵}})$$

$$\tilde{X}(4)=\frac{۱}{۵}(-۴-۳e^{-j\frac{۸\pi}{۵}}-۲e^{-j\frac{۱۶\pi}{۵}}-e^{-j\frac{۲۴\pi}{۵}})$$

۳-

الف-

$$X(z)=\frac{۱-\frac{۱}{z}}{۱-\frac{۱}{۴z^{۲}}}\rightarrow X(z)=\frac{z^{۲}-z}{z^{۲}-\frac{۱}{۴}}\rightarrow \frac{X(z)}{z}=\frac{z-۱}{z^{۲}-(\frac{۱}{۲})^{۲}}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z-۱}{(z+\frac{۱}{۲})(z-\frac{۱}{۲})}\rightarrow \frac{X(z)}{z}=\frac{A}{(z+\frac{۱}{۲})}+\frac{B}{(z-\frac{۱}{۲})}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{\frac{۳}{۲}}{(z+\frac{۱}{۲})}+\frac{\frac{-۱}{۲}}{(z-\frac{۱}{۲})}\rightarrow X(z)=\frac{\frac{۳}{۲}z}{(z+\frac{۱}{۲})}+\frac{\frac{-۱}{۲}z}{(z-\frac{۱}{۲})}$$

$$R-S\rightarrow \frac{۳}{۲}(\frac{-۱}{۲})^{n}u(n)-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})^{n}u(n)$$

$|z|>|\frac{۱}{۲}|$ خارج دایره ای به شعاع نیم حتما دایره ای به شعاع واحد را در بر میگیرد ، پس فوریه دارد.

ب-فوریه دارد.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{\frac{۵}{۳}}{(z-۰.۲)}+\frac{\frac{-۵}{۳}}{(z+۰.۴)}\rightarrow X(z)=\frac{\frac{۵}{۳}z}{(z-۰.۲)}+\frac{\frac{-۵}{۳}z}{(z+۰.۴)}$$

$$x(n)=\frac{۵}{۳}(۰.۲)^{n}u(n)-\frac{۵}{۳}(-۰.۴)^{n}u(n)$$

$$|z|>۰.۴$$

ت- $|z|>۱$ خارج از دایره ای به شعاع واحد است پس فوریه ندارد.

$$x(n)=۴\delta(n) - 10u(n) - (-0.5)^{n}u(n)$$

ث-فوریه ندارد.

$$X(z)=\frac{۲z^{۳}-۵z^{۲}+z+۳}{(z-۱)(z-۲)}=\frac{۲z^{۳}-۵z^{۲}+z+۳}{z^{۲}-۳z+۲}$$

$$X(z)=۲z+۱+\frac{۱}{z^{۲}-۳z+۲}=۲z+۱+\frac{۱}{(z-۱)(z-۲)}$$

$$X_{۱}(z)=\frac{۱}{(z-۱)(z-۲)}\rightarrow\frac{X_{۱}(z)}{z}=\frac{۱}{z(z-۱)(z-۲)}=$$

$$\frac{c_{۱}}{z}+\frac{c_{۲}}{z-۱}+\frac{c_{۳}}{z-۲}\rightarrow c_{۱}=۰.۵, c_{۲}=-۱, c_{۳}=۰.۵$$

$$\rightarrow X(z)=۲z+۱.۵-\frac{z}{z-۱}+۰.۵\frac{z}{z-۲}$$

$$|z|>۲$$

$$x(n)=۲\delta(n+۱)+۱/۵\delta(n)+۰.۵(۲)^{n}u(n)-u(n)$$

۴-

الف-

$$x(n)=(n+۲)u(n)$$
$$x(n)=nu(n)+۲u(n)$$
$$X(z)=-z\frac{d}{dz}(\frac{z}{z-۱})+۲(\frac{z}{z-۱})$$
$$X(z)=\frac{z}{(z-۱)^{۲}}+\frac{۲z}{(z-۱)}$$
$$X(z)=\frac{۲z^{۲}-z}{(z-۱)^{۲}}$$
$$ROC:|z|>۱$$

ب-

$$X(z)=z^{-۱}+z^{-۵}$$

ناحیه همگرائی چون توان ضد منفی ، مثبت است ، مبدا را شامل نمی شود.

پ-

$$(۲)^{n}u(n)\rightarrow\frac{z}{z-۲}\quad |z|>۲$$
$$(۲)^{-n}u(-n)=(\frac{۱}{۲})^{n}u(-n)\rightarrow\frac{\frac{۱}{z}}{\frac{۱}{z}-۲}=\frac{۱}{۱-۲z}\quad |z|<\frac{۱}{۲}$$

۵-

الف- چون سری است باید معادله دوتا سیستم را ضرب کنیم.

$$H(z)=\frac{z^{-۲}}{۰.۵z^{-۲}+z^{-۱}+۱}\cdot\frac{۰.۲۵z^{-۱}+۱}{۰.۵z^{-۲}+z^{-۱}+۱}$$

$$\rightarrow H(z)=\frac{۰.۲۵z^{-۳}+z^{-۲}}{(۰.۵z^{-۲}+z^{-۱}+۱)^{۲}}=\frac{۰.۲۵z^{-۳}+z^{-۲}}{۰.۲۵z^{-۴}+z^{-۲}+۱+۲z^{-۱}+z^{-۲}+z^{-۳}}$$

$$=\frac{۰.۲۵z^{-۳}+z^{-۲}}{۰.۲۵z^{-۴}+۲z^{-۲}+۱+۲z^{-۱}+z^{-۳}}$$

ب-

$$y(n)+۲y(n-۱)+۲y(n-۲)+y(n-۳)+۰.۲۵y(n-۴)=x(n-۲)+۰.۲۵x(n-۳)$$

پ- داخل دایره ای به شعاع واحد است پس پایدار است.

$$۰.۵+z^{۲}+z=۰\rightarrow z=\frac{-۱}{۲}\pm\sqrt{\frac{-۱}{۲}}\rightarrow|z|=\sqrt{\frac{۱}{۲}}<۱\rightarrow \text{stable}$$

ج-

$$H(z)=\frac{۰.۲۵z^{-۳}+z^{-۲}}{۰.۲۵z^{-۴}+۲z^{-۲}+۱+۲z^{-۱}+z^{-۳}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

$$\rightarrow H(۱)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)=\frac{۰.۲۵+۱}{۰.۲۵+۲+۱+۲+۱}=\frac{۱.۲۵}{۶.۲۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$H^{*}(۱)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h^{*}(n)=(\frac{۱}{۵})^{*}=\frac{۱}{۵}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-۱)^{n}h(n)=H(-۱)=\frac{-۰.۲۵+۱}{۰.۲۵+۲+۱-۲-۱}=\frac{۰.۷۵}{۰.۲۵}=۳$$

۶-

کانولوشن $h(n)=\frac{۱}{n!}u(n)$ و $x(n)=(-۰.۵)^n$ در لحظه $n=۰$ برابر می شود با:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{۱}{k!}u(k)(-۰.۵)^{n-k}\xrightarrow{n=۰}y(۰)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{۱}{k!}(-۰.۵)^{-k}$$

$$=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۲)^k}{k!}$$

-۷

$$Y(\Omega)=\int_{\Omega-\frac{\pi}{۴}}^{\Omega+\frac{\pi}{۴}}X(\theta)d\theta\xrightarrow{\frac{d}{d\Omega}}\frac{d}{d\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega+\frac{\pi}{۴})-X(\Omega-\frac{\pi}{۴})$$

$$\xrightarrow{\text{inverse}}-jny(n)=e^{-j\frac{\pi}{۴}}x(n)-e^{-j\frac{\pi}{۴}}x(n)=x(n)(-۲j)\sin\frac{n\pi}{۴}$$

$$y(n)=۲x(n)\frac{\sin\frac{\pi}{۴}}{n}$$