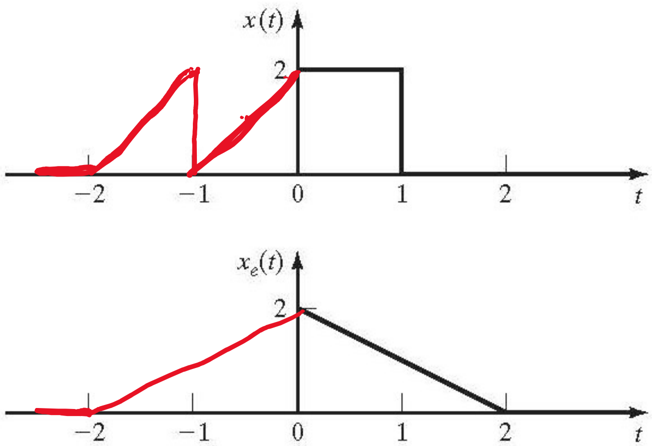
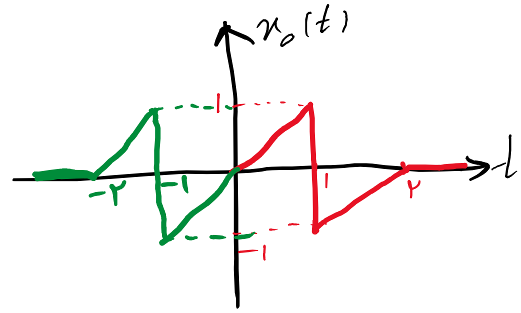
پاسخ امتحان میان ترم سیگنال و سیستم ۱۴۰۲/۸/۳۰

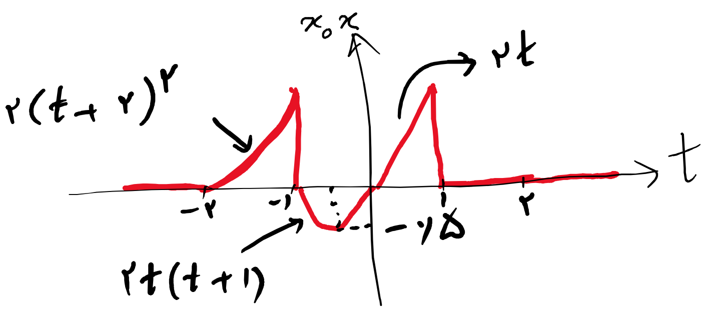
۱- الف- با توجه به رابطه $x(t)=x_e(t)+x_o(t)$ داریم :





ابتدا قسمت زمان مثبت بخش فرد بدست می آید. سپس قسمت زمان منفی با توجه به فرد بودن آن تعیین می شود. همچنین قسمت زمان منفی بخش زوج بدست می آید و نهایتا می توان شکل موج x(t) را از روی بخشهای زوج و فرد تعیین کرد.

ب-



۲- $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(۴\tau)d\tau \to y'(t)=x(۴t)\to x(t)=y'(\frac{t}{۴})$ پس معکوس پذیر است.

$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(۴\tau)d\tau$ پایدار نیست. زیرا با فرض x(t)=u(t) داریم :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}u(۴\tau)d\tau=\frac{۱}{۴}\int_{-\infty}^{۴t}u(\tau_۱)d\tau_۱=\begin{cases}۰ : t<۰\\ \frac{۱}{۴}\int_{۰}^{۴t}۱d\tau_۱ : t>۰\end{cases}=\begin{cases}۰ : t<۰\\ t : t>۰\end{cases}\to y(\infty)=\infty$$

۳- $$۶y(n)-۵y(n-۱)=\delta(n)\to y(n)=\frac{۱}{۶}\delta(n)+\frac{۵}{۶}y(n-۱)\to y(۰)=-\frac{۲}{۳}\to y(۱)=\frac{۵}{۶}(-\frac{۲}{۳})\to$$

$$y(۱)=(\frac{۵}{۶})^۲(-\frac{۲}{۳})\to y(۲)=(\frac{۵}{۶})^۳(-\frac{۲}{۳})\to y(n)=(\frac{۵}{۶})^n(-\frac{۲}{۳}) : n\geq ۰$$

$$۶y(n)-۵y(n-۱)=\delta(n)\to y(n-۱)=-\frac{۱}{۵}\delta(n)+\frac{۶}{۵}y(n)\to y(-۲)=-۱/۲\to y(-۳)=-(۱/۲)^۲\to$$

$$y(n)=-(۱/۲)^{-n-۱} : n\leq -۱$$

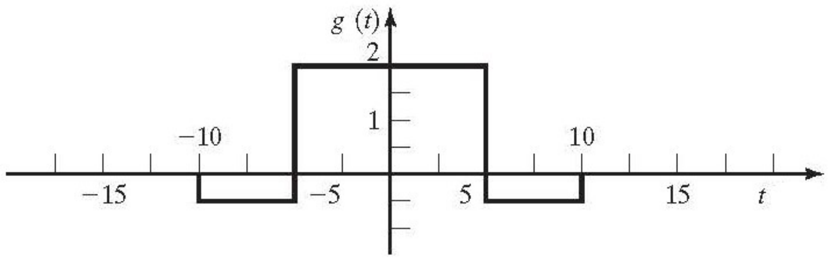
۴-

$$x(t)=\cos^{۳}(t)+\sin^{۲}(۲t)+\cos(۲t-\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۴}\cos(۳t)+\frac{۳}{۴}\cos(t)+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos(۴t)+\sin(۲t)$$

$$x(t)=\frac{۱}{۸}e^{j۳t}+\frac{۱}{۸}e^{-j۳t}+\frac{۳}{۸}e^{jt}+\frac{۳}{۸}e^{-jt}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}e^{j۴t}-\frac{۱}{۴}e^{-j۴t}+\frac{۱}{۲j}e^{j۲t}-\frac{۱}{۲j}e^{-j۲t}\rightarrow C_{۰}=۰/۵$$

$$C_{۱}=C_{-۱}=۰/۳۷۵\ ,C_{۴}=-۰/۲۵=C_{-۴}\ ,\ C_{۳}=C_{-۳}=۰/۱۲۵\ ,\ C_{۲}=-۰/۵j\ ,\ C_{-۲}=۰/۵j$$

۵- $g(t)=-۰/۵u(t+۱۰)+۲/۵u(t+۵)-۲/۵u(t-۵)+۰/۵u(t-۱۰)$



$$u(t)\rightarrow\frac{۱}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\Rightarrow$$

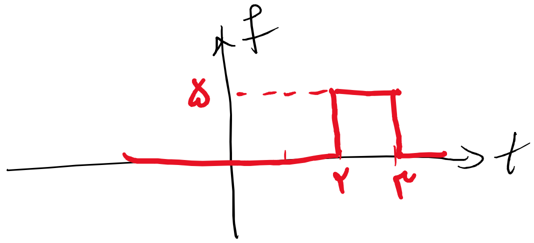
$$X(\omega)=-۰/۵(\frac{۱}{j\omega}+\pi\delta(\omega))e^{j۱۰\omega}+۲/۵(\frac{۱}{j\omega}+\pi\delta(\omega))e^{j۵\omega}-۲/۵(\frac{۱}{j\omega}+\pi\delta(\omega))e^{-j۵\omega}+$$

$$۰/۵(\frac{۱}{j\omega}+\pi\delta(\omega))e^{-j۱۰\omega}$$

$$X(\omega)=\frac{۱}{j\omega}(-۰/۵e^{j۱۰\omega}+۲/۵e^{j۵\omega}-۲/۵e^{-j۵\omega}+۰/۵e^{-j۱۰\omega})-۰/۵\pi\delta(\omega)+۲/۵\pi\delta(\omega)-۲/۵\pi\delta(\omega)+۰/۵\pi\delta(\omega)$$

$$X(\omega)=\frac{۱}{j\omega}(-j\sin(۱۰\omega)+۵j\sin(۵\omega))\rightarrow X(\omega)=\frac{۱}{\omega}(-\sin(۱۰\omega)+۵\sin(۵\omega))$$

۶- $f(t)=۵u(t-۲)u(۳-t)=۵u(t-۲)-۵u(t-۳)$



$$X(s)=\frac{۵}{s}e^{-۲s}-\frac{۵}{s}e^{-۳s}\ \ :\ \ Re(s)>۰$$

۷- $y''+۶y'+۵y=۲x'+۶x\rightarrow H(s)=\frac{۲s+۶}{s^{۲}+۶s+۵}=\frac{۲(s+۳)}{(s+۵)(s+۱)}\ ,\ X(s)=\frac{۱}{s+۵}\ :\ Re(s)>-۵$

برای اینکه از خاصیت کانولوشن در تبدیل لاپلاس استفاده کرد، و همچنین سیستم ناپایدار باشد، بایستی ناحیه همگرایی تابع تبدیل برابر $Re(s)<-۱$ باشد/ پس :

$$Y(s)=\frac{۲(s+۳)}{(s+۱)(s+۵)^{۲}}=\frac{A}{s+۱}+\frac{B}{s+۵}+\frac{C}{(s+۵)^{۲}}\rightarrow A=\lim_{s\to-۱}(s+۱)Y(s)=\frac{۱}{۴}\ ,\ C=\lim_{s\to-۵}(s+۵)^{۲}Y(s)=۱\rightarrow$$

$$B=\frac{۱}{۱!}\lim_{s\to-۵}\frac{d}{ds}[(s+۵)^{۲}Y(s)]=\lim_{s\to-۵}\frac{d}{ds}[\frac{۲(s+۳)}{(s+۱)}]=\lim_{s\to-۵}[\frac{۲(s+۱)-۲(s+۳)}{(s+۱)^{۲}}]=-\frac{۱}{۴}$$

$$y(t)=-\frac{۱}{۴}e^{-t}u(-t)-\frac{۱}{۴}e^{-۵t}u(t)+te^{-۵t}u(t)$$