پاسخ امتحان پایان ترم

۱- الف- در این قسمت x(t) شامل فرکانسهای ۴/۵ و ۲/۵ هرتز است و لذا فرکانس نمونه برداری بایستی حداقل برابر ۹ هرتز باشد.

ب- در این قسمت x(t) شامل فرکانسهای ۳/۵ و ۳ هرتز است و لذا فرکانس نمونه برداری بایستی حداقل برابر ۷ هرتز باشد.

پ- پس حداقل فرکانس نمونه برداری برای مجموع دو سیگنال الف و ب برابر است با : ۹ هرتز

-۲

$$x(n)=\begin{cases} n+1 : n=1,3 \\ n-1 : n=0,2 \\ 0 \quad : \text{otherwise} \end{cases} \rightarrow x(0)=-1, x(1)=2, x(2)=1, x(3)=4 \rightarrow N_1 = N = 4$$

$$\tilde{X}(k)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{4}n}=\frac{1}{4}(-1+2e^{-jk\frac{\pi}{2}}+e^{-jk\frac{\pi}{2}2}+4e^{-jk\frac{\pi}{2}3}) \rightarrow \tilde{X}(0)=1/5$$

$$\tilde{X}(1)=\frac{1}{4}(-1-2j-1+4j)=-0/5+0/5j \ , \ \tilde{X}(2)=\frac{1}{4}(-1-2+1-4)=-1/5$$

$$\tilde{X}(3)=\frac{1}{4}(-1+2j-1-4j)=-0/5-0/5j$$

-۳

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \rightarrow X(0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)=10, S_2=\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |x(n)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |nx(n)|^2 ,$$

$$-jnx(n) \rightarrow \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \ , \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X_1(\Omega)|^2 \, d\Omega \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |-jnx(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}|^2 \, d\Omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |nx(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}|^2 \, d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{20}{\pi})^2 d\Omega=\frac{200}{\pi^3}$$

-۴

$$X(z)=\frac{z^{-3}}{(1-10z^{-1})(1-5z^{-1})}=\frac{z^{-1}}{(z-10)(z-5)} \rightarrow X(z)z^{n-1}=\frac{z^{n-2}}{(z-10)(z-5)}$$

چون سیگنال دوطرفه است، ناحیه همگرایی برابر است با $5<|z|<10$ و دایره C که در درون این ناحیه همگرایی است، برای $n \geq 2$ فقط شامل قطب ۵ است، بنابراین داریم :

$$K=\lim_{z\to 5}(z-5)X(z)z^{n-1}=\lim_{z\to 5}\frac{z^{n-2}}{(z-10)}=-0/2(5)^{n-2} \Rightarrow x(n)=-0/2(5)^{n-2} \ : \ n \geq 2$$

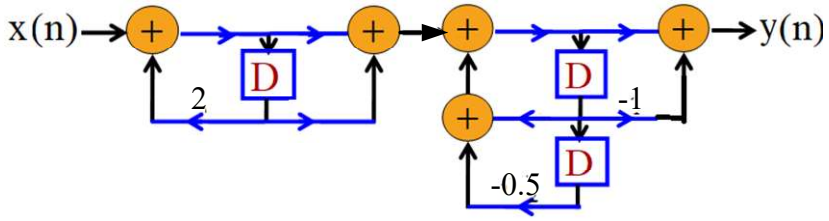
ناحیه همگرایی دایره به شعاع واحد را در بر ندارد. پس این سیگنال DTFT ندارد.

-۵

$$H_1(\Omega)=\frac{1+e^{-j\Omega}}{1-2e^{-j\Omega}} \ , \ H_2(\Omega)=\frac{1-e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}+0/5e^{-2j\Omega}} \rightarrow H(\Omega)=\frac{1+e^{-j\Omega}}{1-2e^{-j\Omega}}\frac{1-e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}+0/5e^{-2j\Omega}}$$

$$H(\Omega)=\frac{1-e^{-2j\Omega}}{1-3e^{-j\Omega}+2/5e^{-2j\Omega}-e^{-3j\Omega}}=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \rightarrow$$

$$y(n)-3y(n-1)+2/5y(n-2)-y(n-3)=x(n)-x(n-2)$$



۶- $H(z)=\frac{۱-۲z^{-۱}}{۱-۰/۵z^{-۱}} \rightarrow H(\Omega)=\frac{۱-۲e^{-j\Omega}}{۱-۰/۵e^{-j\Omega}}=\frac{۱-۲\cos(\Omega)+۲j\sin(\Omega)}{۱-۰/۵\cos(\Omega)+۰/۵j\sin(\Omega)} \rightarrow$

$$|H(\Omega)|=\frac{\sqrt{(۱-۲\cos(\Omega))^{۲}+(۲\sin(\Omega))^{۲}}}{\sqrt{(۱-۰/۵\cos(\Omega))^{۲}+(۰/۵\sin(\Omega))^{۲}}}=\frac{\sqrt{۵-۴\cos(\Omega)}}{\sqrt{۱/۲۵-\cos(\Omega)}}=\frac{۲\sqrt{۱/۲۵-\cos(\Omega)}}{\sqrt{۱/۲۵-\cos(\Omega)}}=۲$$

پس فیلتر تمام گذر است.

$$\angle H(\Omega)=tg^{-۱}(\frac{۲\sin(\Omega)}{۱-۲\cos(\Omega)})-tg^{-۱}(\frac{۰/۵\sin(\Omega)}{۱-۰/۵\cos(\Omega)}) \ , \ x(n)=\cos(\frac{\pi}{۲}n) \rightarrow$$

$$\angle H(\frac{\pi}{۲})=tg^{-۱}(\frac{۲}{۱})-tg^{-۱}(\frac{۰/۵}{۱})=۳۶/۹^{\circ} \Rightarrow y(n)=۲\cos(\frac{\pi}{۲}n+۳۶/۹^{\circ})$$