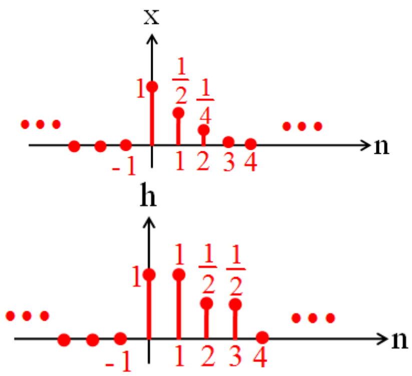
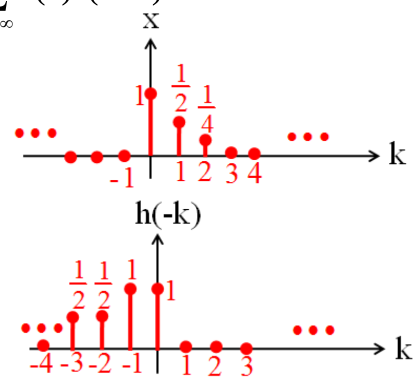
کانولوشن گسسته

مثال ۱:



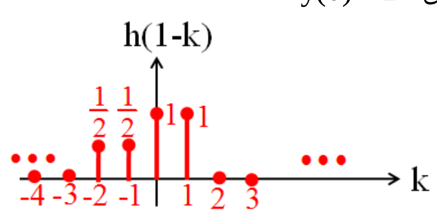
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$



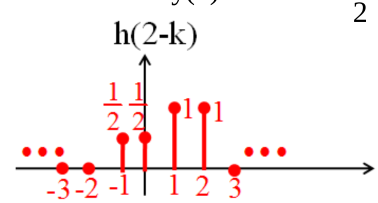
واضح است که با انتقال سیگنال h(-k) به سمت چپ، حاصلضرب آن در x(k) صفر خواهد بود. پس :

$$y(n)=0 \;\; : \;\; n<0$$

همچنین : $y(0)=1$



پس : $y(1)=1\times1+1\times\frac{1}{2}=1.5$



پس : $y(1)=1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\times1=1.25$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$y(n)=\begin{cases}0 & : \; n\neq 0,1,2,3,4,5\\ 1 & : \; n=0,3\\ 1.5 & : \; n=1\\ 1.25 & : \; n=2\\ 0.375 & : \; n=4\\ 0.125 & : \; n=5\end{cases}$$

مثال ۲ : محاسبه کانولوشن یک سیگنال با ضربه واحد

$$x(n)*\delta(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n-k)$$

$$=x(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)=x(n)$$

به همین ترتیب : $x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$

مثال ۳ : در چه صورت دو سیستم زیر معادل هستند؟

$$x(n)\rightarrow\boxed{h_1(n)}\rightarrow\boxed{h_2(n)}\rightarrow y(n) \equiv x(n)\rightarrow\boxed{h(n)}\rightarrow y(n)$$

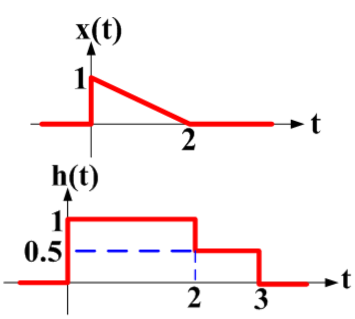
$$y(n)=h_2(n)*[h_1(n)*x(n)]=[h_2(n)*h_1(n)]*x(n)$$

$$h(n)=h_2(n)*h_1(n)$$

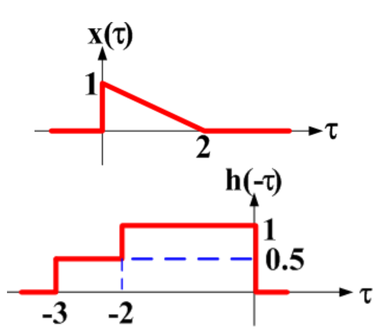
با توجه به خاصیت جابجایی دو سیستم در شکل فوق جابجاپذیر هستند.

کانولوشن پیوسته

مثال ۴ :

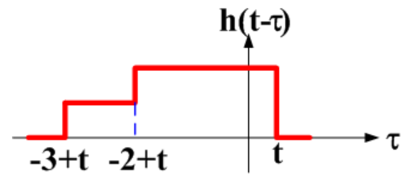


$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



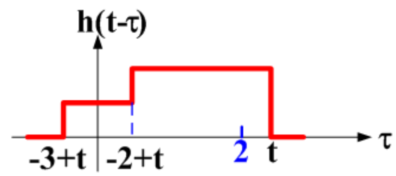
واضح است که با انتقال سیگنال h(-t) به سمت چپ،
حاصلضرب آن در x(t) صفر خواهد بود. پس :

$$y(t)=0 \;:\; t<0$$



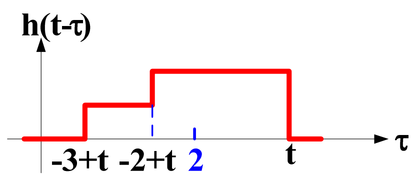
$$y(t)=\int_0^t -0.5(\tau-2)\times 1d\tau=-0.25(\tau-2)^2\Big|_0^t$$

$$=1-0.25(t-2)^2 \;:\; t<2$$



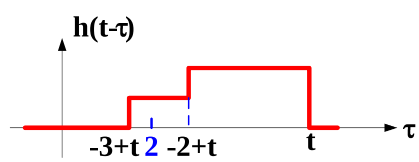
$$y(t)=\int_0^{-2+t} -0.5(\tau-2)\times(0.5)d\tau+\int_{-2+t}^{2} -0.5(\tau-2)\times 1d\tau$$

$$=\frac{1}{8}(t-4)^2+0.5 \;:\; 2<t<3$$



$$y(t)=\int_{-3+t}^{-2+t} -0.5(\tau-2)\times(0.5)d\tau+\int_{-2+t}^{2} -0.5(\tau-2)\times 1d\tau$$

$$=\frac{1}{8}(t-4)^2+\frac{1}{8}(t-5)^2 \;:\; 3<t<4$$



$$y(t)=\int_{-3+t}^{2} -0.5(\tau-2)\times(0.5)d\tau$$

$$=\frac{1}{8}(t-5)^2 \;:\; 4<t<5$$

واضح است که با انتقال سیگنال h(-t) به سمت راست به مقدار بیش از ۵ ثانیه، حاصلضرب آن در x(t) صفر خواهد بود. پس :

$$y(t)=0 \;:\; t>5$$

مثال ۵ : محاسبه کانولوشن یک سیگنال با ضربه واحد

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$x(t)*\delta(t)=x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

به همین ترتیب :

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

مثال ۶ : در چه صورت دو سیستم زیر معادل هستند؟

$$x(t)\rightarrow\boxed{h_1(t)}\rightarrow\boxed{h_2(t)}\rightarrow y(t)\;\equiv\;x(t)\rightarrow\boxed{h(t)}\rightarrow y(t)$$

$$y(t)=h_2(t)*[h_1(t)*x(t)]=[h_2(t)*h_1(t)]*x(t)$$

$$h(t)=h_2(t)*h_1(t)$$

با توجه به خاصیت جابجایی دو سیستم در شکل فوق جابجاپذیر هستند.

مثال ۷ : سیستم حافظه دار $y(n)=x(n)+x(n-2)$

$$x(n)=\delta(n)\rightarrow h(n)=\delta(n)+\delta(n-2)$$

پس سیستم با حافظه است.

مثال ۸ : محاسبه سیستم معکوس سیستم $h(n)=u(n)$

$$u(n)*g(n)=\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$g(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$$

اگر در Google کلمه convolution را جستجو کنید ، موارد بسیاری را در این زمینه مشاهده می کنید که از جمله آنها می توان به موارد زیر اشاره نمود :

1- convolution demo

www.eas.asu.edu/~spanias/convolution-demo.htm

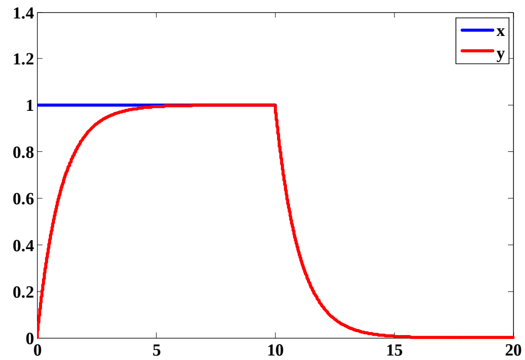
2- The joy of convolution

www.jhu.edu/~signals/index.html

مثال ۹ : کانولوشن دو سیگنال

$$x(t)=\begin{cases}0 : t<0\ ,\ t>10\\ 1 : 0<t<10\end{cases}\quad,\quad h(t)=e^{-t}u(t)$$

```
clear
t=0:0.001:10;
x=ones(size(t));
h=exp(-t);
t1=0:0.001:20;
y=0.001*conv(x,h);
plot(t,x,t1,y)
```



مثال ۱۰ : محاسبه پاسخ به ضربه از روی پاسخ به ورودی مشخص

فرض کنید ورودی و خروجی سیستم، همان مثال ۹ باشد.

```
h1=1000*deconv(y,x);
plot(t,h1)
```