دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
دانشکده مهندسی و علم مواد

شکست، خزش و خستگی

جلسه سوم
(تمرکز تنش و استحکام کریستال بدون نقص)

دکتر رضا اسلامی فارسانی

تمرکز تنش

وجود هر نوع ناپیوستگی هندسی در یک جسم مانند یک سوراخ یا شیار، منجر به توزیع غیریکنواخت تنش در مجاورت آن نقص می شود. در ناحیه نزدیک این ناپیوستگی، تنش بیش از تنش متوسط در فواصل دور از ناپیوستگی است. بنابراین هر نوع ناپیوستگی، مکان تمرکز تنش یا منبع تنش نام دارد.

$$k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{\text{اسمی}}}$$

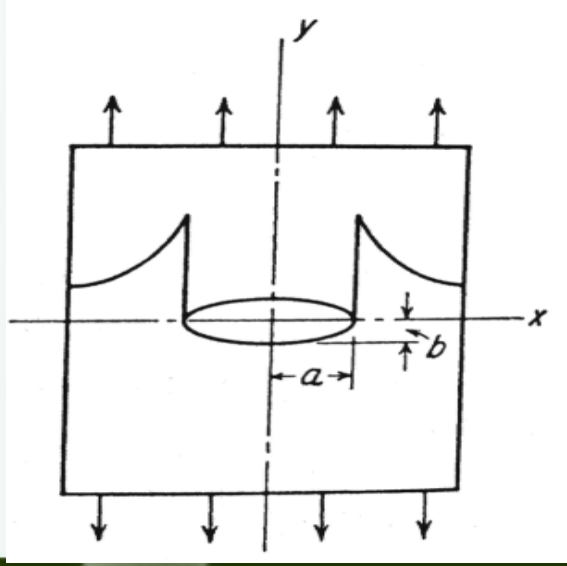
برای تمرکز تنش، از ضریب تمرکز تنش استفاده می شود که نسبت تنش حداکثر به تنش اسمی (بر مبنای سطح مقطع خالص) است.

تمرکز تنش

هرگاه صفحه ای حاوی یک حفره به شکل بیضی با اقطار 2a و 2b در معرض تنش تک محوری باشند، حداکثر تنش در کناره های حفره عبارتست از

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)$$

σ، تنش کششی اعمالی در کناره های صفحه است. معادله نشان می دهد که تنش با افزایش a/b زیاد می شود. لذا سوراخ بسیار نازک نظیر ترک عمود بر جهت کششی، منجر به تمرکز تنش بسیار زیادی می شود.



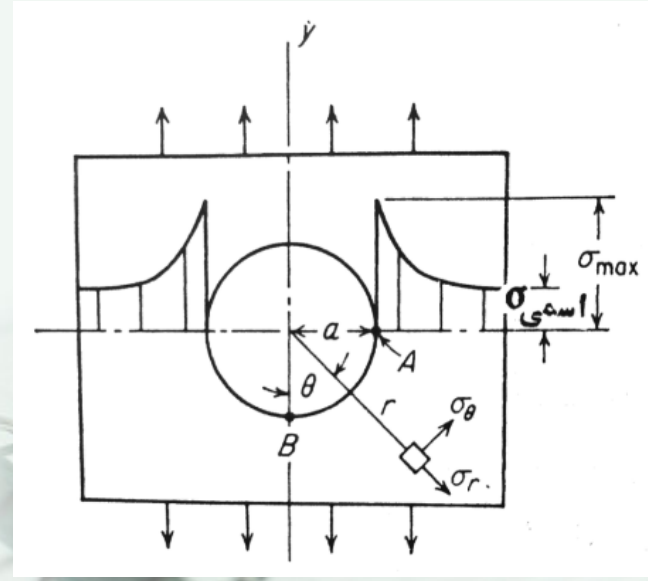
تمرکز تنش

شیار علاوه بر ایجاد تمرکز تنش، تنش های موضعی دو بعدی و سه بعدی هم ایجاد می کند. مثلاً برای سوراخ دایره ای شکل در یک ورق تخت که تحت اعمال بار محور است، علاوه بر تنش طولی، تنش شعاعی هم ایجاد می شود. تنش های ایجاد شده در یک ورق عریض نامحدود با سوراخ دایره ای شکل که تحت بار محوری است، شامل موارد زیر است:

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^r}\right)+\frac{\sigma}{2}\left(1+3\frac{a^4}{r^4}-4\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{\sigma}{2}\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau = -\frac{\sigma}{2}\left(1-3\frac{a^4}{r^4}+2\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta$$



تمرکز تنش

تنش حداکثر در نقطه A ($\theta = \frac{\pi}{2}$ و $r = a$) روی می دهد که $\sigma_\theta = 3\sigma = \sigma_{max}$ است. لذا ضریب نظری تمرکز تنش ورقی با سوراخ دایره ای شکل برابر ۳ است.

در r=a و Θ=0 مقدار $\sigma_\theta = -\sigma$ است. لذا هنگامی که به ورق تنش کششی وارد می شود، تنش فشاری به همان مقدار نیز در لبه سوراخ در نقطه B در جهت عمود بر محور بارگذاری در صفحه ورق بوجود می آید.

اگر سوراخ نباشد، توزیع تنش در سطح مقطع ورق، یکنواخت و برابر با نیروی وارده تقسیم بر مساحت ورق است. اما سوراخ سبب می شود که در لبه های سوراخ تنش محوری زیاد شده و با دور شدن از آن کاهش می یابد. برای یک حفره دایره ای شکل که a=b است، داریم:

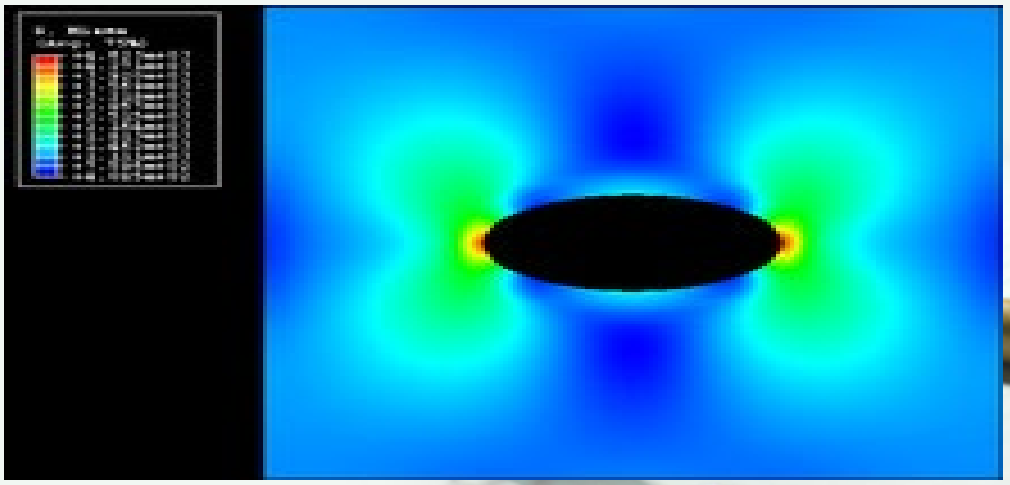
$\sigma max = 3\sigma$

تمرکز تنش

برای تمرکز تنش از ضریب تمرکز تنش استفاده می کنند

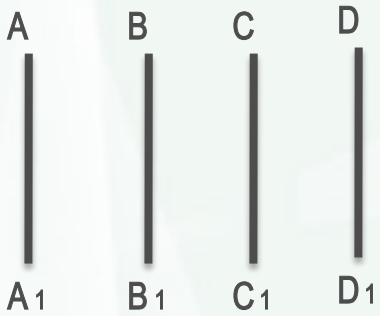
ضریب تمرکز تنش یا Kt بصورت نسبت تنش ماکزیمم بر تنش اسمی برحسب سطح مقطع خالص تعریف می‌شود. البته برخی از محققان از مقدار تنش اسمی در محل عدم وجود عوامل تمرکز تنش استفاده می کنند.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nominal}}$$



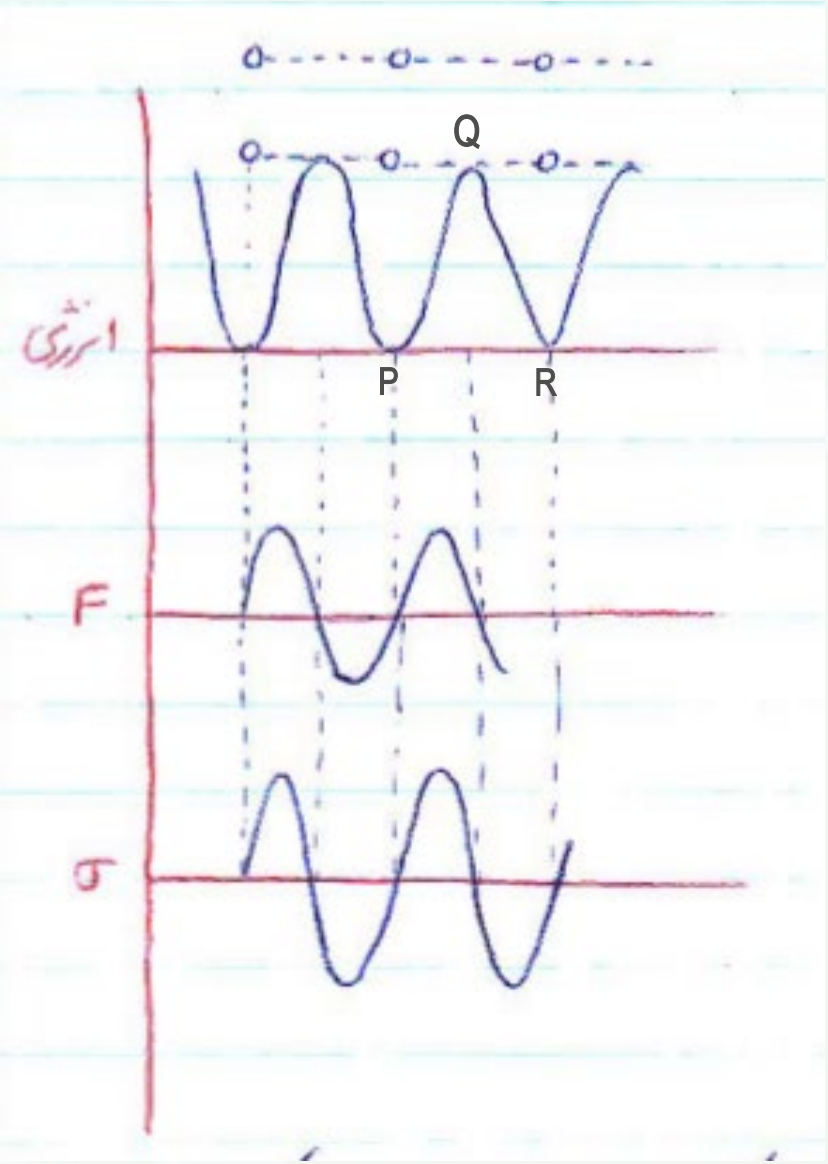
استحکام کریستال بدون نقص (استحکام تئوری)

استحکام چسبندگی تئوری یک ماده جامد، تنش لازم برای شکستن پیوندهای آن ماده است. مقدار آن حدود E/10 با استفاده از فیزیک حالت جامد است. مثلاً برای الماس 100 GPa و برای نمونه ای از فلز حدود 10 GPa است.



برای تغییر شکل پلاستیک لازم است اتم A به نقطه B و سپس به نقطه C و ... حرکت کند. بدین منظور باید تمام اتم ها در صفحه لغزش حرکت همگانی نموده و باند های AA1 و BB1 و... قطع شوند که تنش زیادی می طلبد.

استحکام کریستال بدون نقص (استحکام تئوری)



حالت تعادلی اتم ها در شبکه کریستالی در شکل زیر با نقاط P و R مشخص شده است (به فاصله b از یکدیگر).

اگر اتمی در نقطه Q باشد در حالت شبه تعادلی است.

شکل دقیق منحنی انرژی مشخص نیست، اما جهت سهولت محاسبات، منحنی موجی شکل سینوسی فرض شده است.

جهت قرار دادن اتم ها در صفحه لغزش بجز در نقاط تعادلی P و R باید نیرویی به جسم وارد شود.

استحکام کریستال بدون نقص (استحکام تئوری)

مثلا برای قرار دادن اتم بین P و Q باید نیرویی در جهت راست اعمال شده تا به نقطه تعادلی P باز نگردد ($0 \leq x \leq b/2$). برای اتم قرار گرفته در فاصله Q و R ($b/2 \leq x \leq b$)، اتم تمایل دارد به نقطه تعادلی R بلغزد (به علت کاهش انرژی از Q به R). برای جلوگیری از آن به نیرویی در جهت چپ نیاز است که عکس نیروی لازم برای نگهداشتن اتم در فاصله PQ است. لذا این نیرو برخلاف نیروی اول منفی بوده، شیب منحنی انرژی منفی شده و نیروی لازم نیز در قسمت منفی ظاهر می شود. پس تنش برشی لازم برای حرکت اتم ها در صفحه لغزش به صورت نوسانی تغییر می کند. در نقاط P و R تنش لازم صفر است و در $b/4$ و $3b/4$ حداکثر است.

استحکام کریستال بدون نقص (استحکام تئوری)

تنش برشی با توجه به تغییرات سینوسی انرژی در طول شبکه عبارت است از:

$$\tau = \tau m \ \sin(\frac{2\pi x}{b})$$

τm ماکزیمم مقاومت تئوری کریستال

τ تنش برشی اعمالی

b فاصله بین نقاط تعادلی

X فاصله ای که اتمها حرکت کرده اند

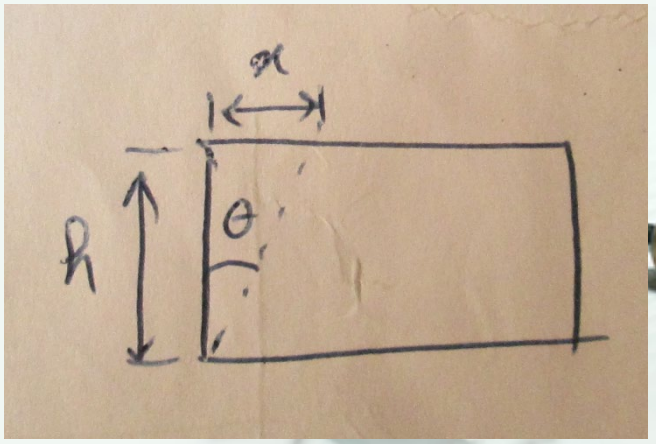
استحکام کریستال بدون نقص (استحکام تئوری)

در حالت اولیه، x=0 است و در این حالت باید تنش برشی سبب تسلیم شود.

$$\tau = \tau m \ \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right) = G\gamma \ \rightarrow G = \frac{d\tau}{d\gamma} = h\frac{d\tau}{dx}$$

رابطه ۱

$$\tan\theta = \frac{x}{h}$$



استحکام کریستال بدون نقص (استحکام تئوری)

با قرارادن x=0 در cos، رابطه ۲ ساده می شود..

رابطه ۲

$$\frac{d\tau}{dx} = \tau m \frac{2\pi}{b} \cos\left(\frac{2\pi x}{b}\right) = \frac{2\pi\tau m}{b}$$

از روابط ۱ و ۲، رابطه ۳ بدست می آید:

$$G = \frac{2\pi h\ \tau m}{b} \rightarrow \tau m = \frac{Gb}{2\pi h}$$

استحکام کریستال بدون نقص (استحکام تئوری)

مقدار b/h در ساختارهای کریستالی حدود ۱-۰/۵

است، لذا از رابطه ۳ با تقریب خواهیم داشت:

$$\tau m \approx \frac{G}{10}$$

در حالت تنش کششی، تنش برشی حداکثر در صفحه ای با زاویه ٤٥ درجه نسبت به محور اعمال کشش روی می دهد که در این حالت داریم:

رابطه ٤

$$\tau m = \sigma \cos 45 \cos 45 \rightarrow \tau m = \frac{\sigma}{2} \rightarrow \sigma = 2\tau m$$

استحکام کریستال بدون نقص (استحکام تئوری)

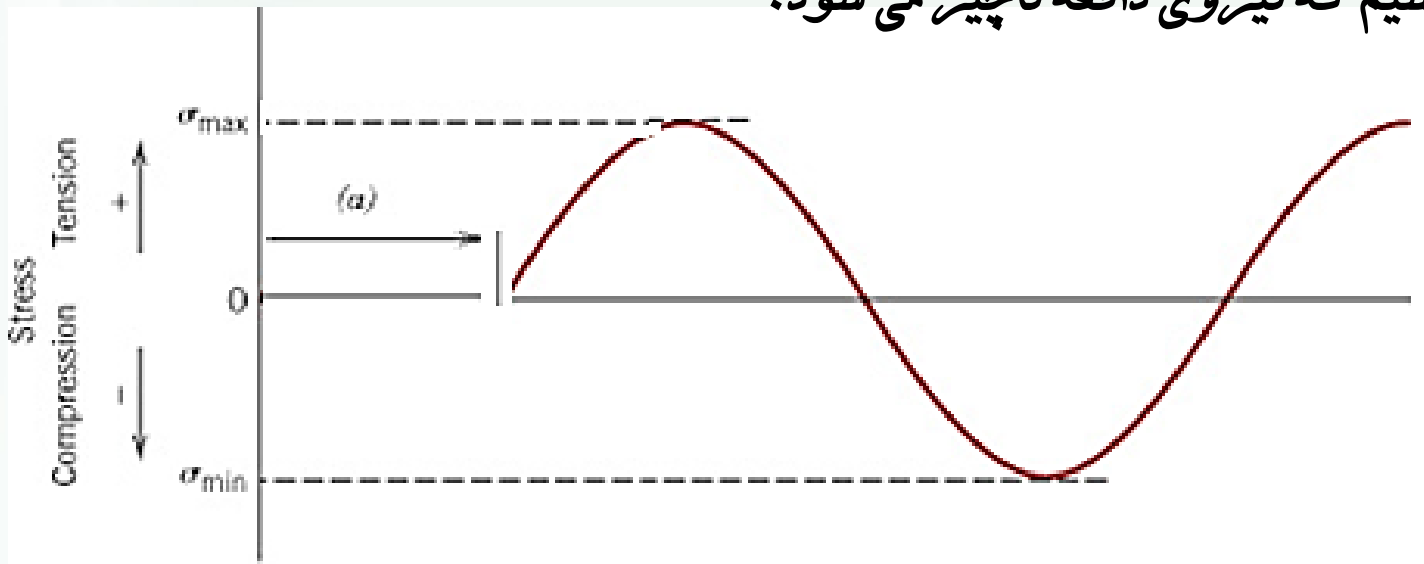
چون G در محدوده E/2 تا E/3 است، لذا $\sigma \approx \frac{E}{10}$ می شود که با آنچه در ابتدا گفته شده مطابقت دارد. از روابط ۳ و ٤ داریم:

$$\sigma = \frac{Gb}{\pi h}$$

$\sigma \approx \frac{E}{10}$ این عدد از استحکام واقعی مواد جامد کریستالی بسیار بزرگتر است (۱۰ تا ۱۰۰ برابر). در مواد کریستالی به علت عیوب کریستالی و نابجایی، استحکام بسیار کمتر از حد تئوری است، مگر در ویسکرها که نزدیک عدد تئوری است.

محاسبه تنش تئوری برای شکست اجسام ترد

هنگام کشش کریستال فاصله جدایش بین اتم ها زیاد شده و نیروی دافعه بین آنها بسیار سریع تر از نیروی جاذبه کاهش می یابد. لذا یک نیروی خالص بین اتم ها با بار کششی موازنه می شود. با افزایش بار کشش و کاهش نیروی دافعه به نقطه ای می رسیم که نیروی دافعه ناچیز می شود.



محاسبه تنش تئوری برای شکست اجسام ترد

اگر فرض کنیم منحنی نیرو با استحکام پیوستگی به صورت سینوسی باشد،

استحکام چسبندگی تئوریکی با تقریب خوب عبارتست از:

$$\sigma = \sigma th \sin(2\pi x/\lambda)$$

λ= طول موج

x = مقدار جابجایی اتم ها نسبت به هم

محاسبه تنش تئوری برای شکست اجسام ترد

رابطه مذکور به ازای تنش های کم در حد الاستیک با توجه به یکسان بودن تقریبی x با sinx در این حالت، به صورت زیر است:

$$\sigma = \sigma th\ (2\pi x/\lambda)$$

در کرنش های کم، تنش مطابق با قانون هوک به میزان جابجایی اتم ها نسبت به هم برای اجسام ترد مرتبط می شود، لذا داریم:

$$\sigma = Ee \longrightarrow \sigma = Ex/a$$

در رابطه بالا، a فاصله بین اتم ها در حالت تعادلی پیش از تغییرشکل است و نسبت x به a همان کرنش برشی برای مقادیر کم است.

محاسبه تنش تئوری برای شکست اجسام ترد

از دو رابطه مذکور داریم:

$$Ex/a = \sigma th\ (2\pi x/\lambda) \longrightarrow \sigma th = (\lambda / 2\pi)\ (E/a)$$

با محاسبه کار انجام شده تا لحظه شکست و انتگرال گیری از رابطه $\sigma = \sigma th \sin(2\pi x/\lambda)$

در نهایت پس از انتگرال گیری داریم:

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a_0}}$$

محاسبه تنش تئوری برای شکست اجسام ترد

رابطه روبرو تنش تئوریک یا همان نیروی لازم برای شکست پیوند بین اتم ها را نشان می دهد:

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a_0}}$$

E – Young's modulus

γ – Specific surface energy

a_0 – Lattice parameter

σ_{th} – Theoretical strength of the material

برای ماده عاری از عیوب: $\sigma_{th} \sim E/10$