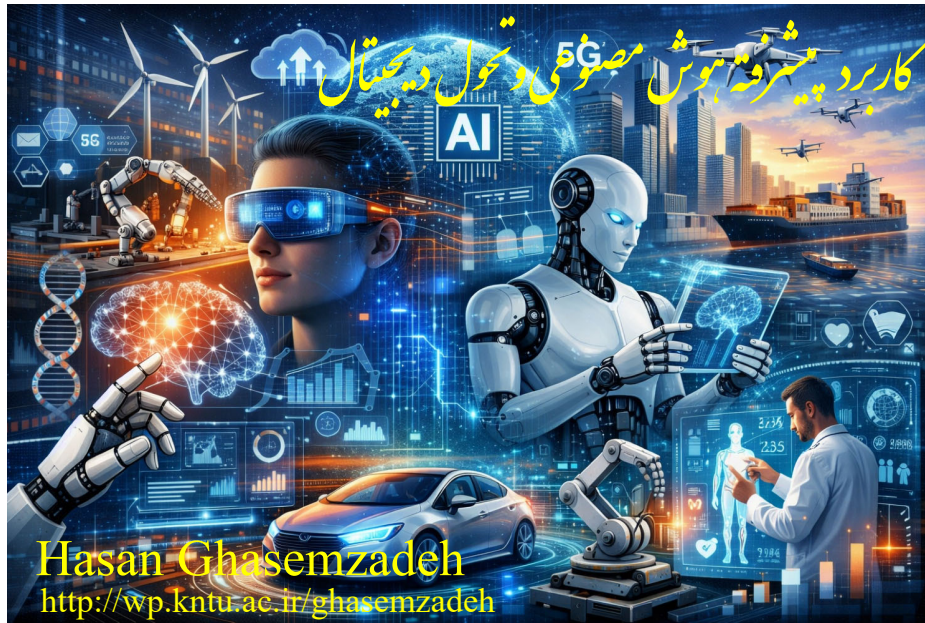


Advanced Application of Artificial Intelligence and Digital Transformation



Hasan Ghasemzadeh
<http://wp.kntu.ac.ir/ghasemzadeh>

بهینه‌سازی در گراف (Optimization in Graph)



فهرست مطالب - بهینه سازی در گراف

مقدمه

انواع گراف

گراف بدون جهت

گراف جهت دار

الگوریتم های یافتن مسیر بهینه

- Breadth-first Search
- Dijkstra's Method
- Bellman-Ford Method
- Floyd-Warshall Method

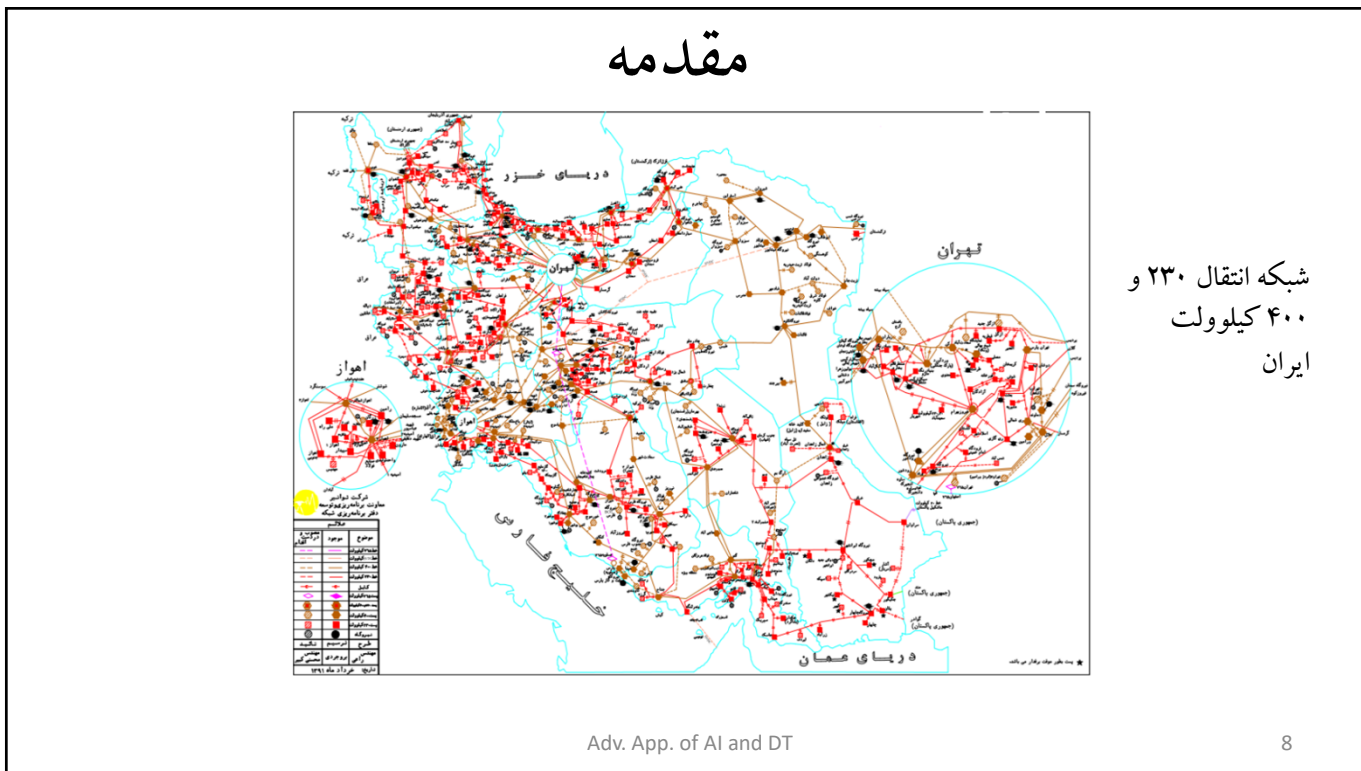
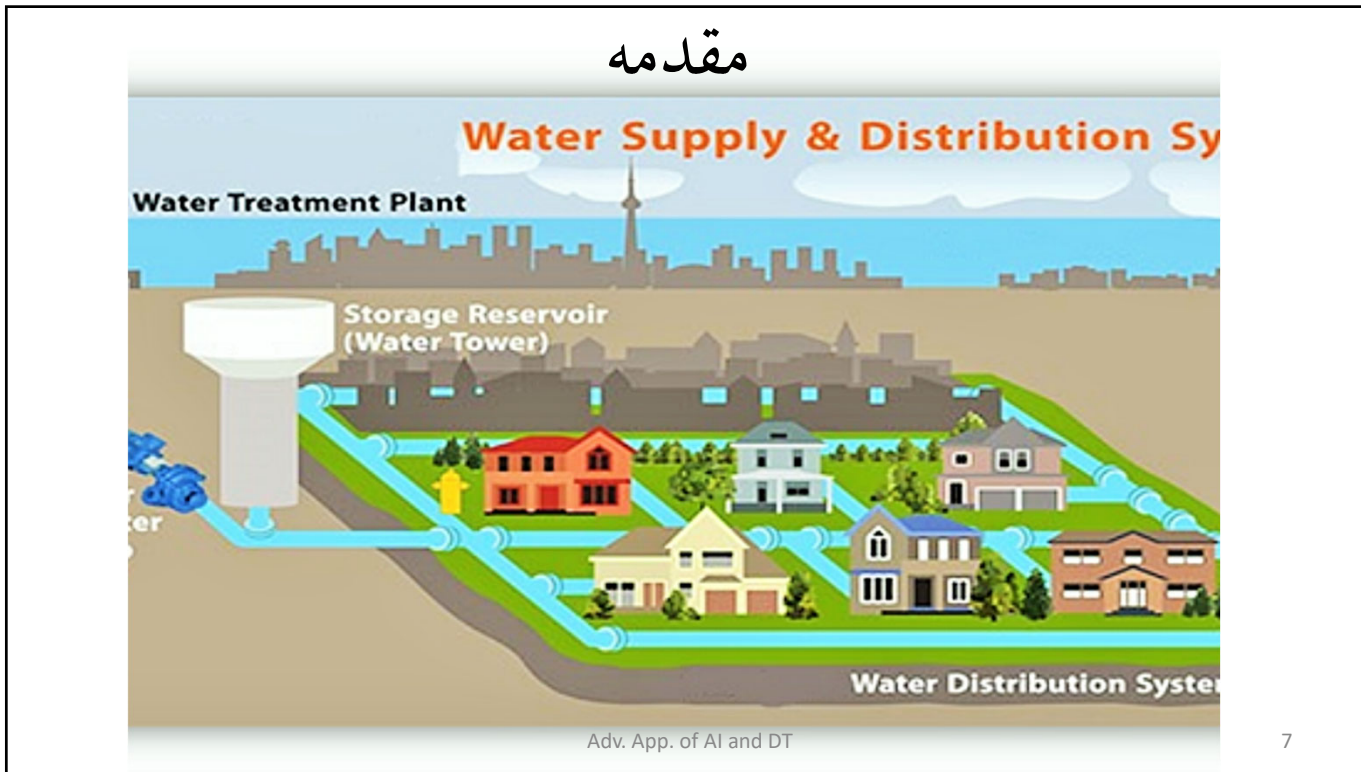
مقدمه



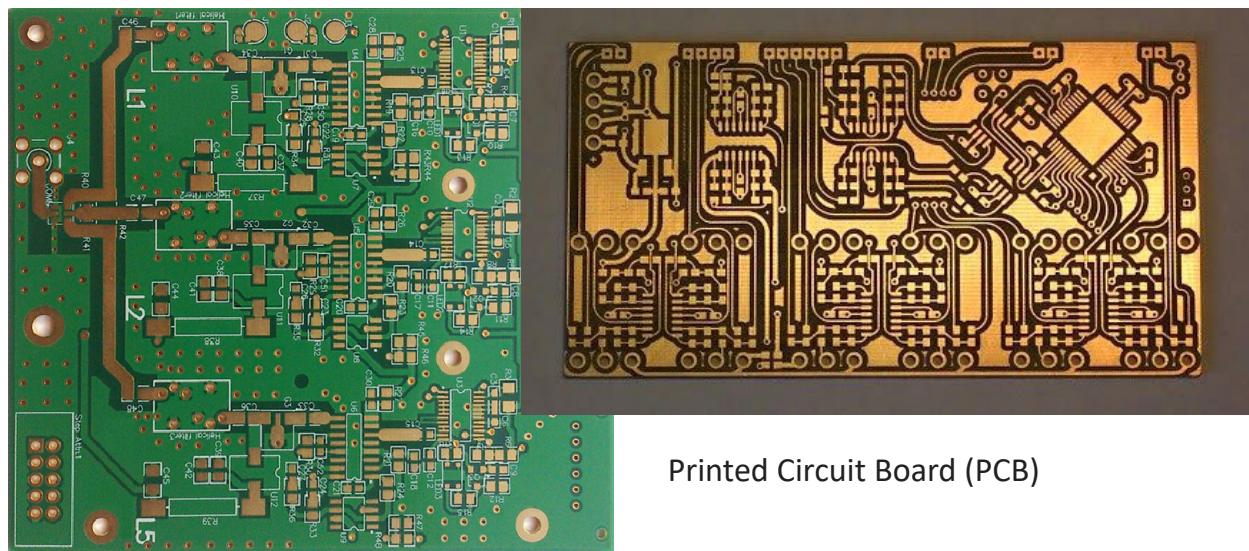
Adv. App. of AI and DT

4





مقدمه



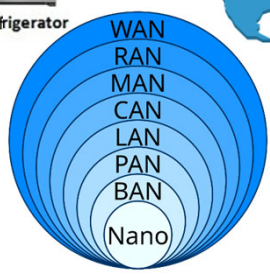
Printed Circuit Board (PCB)

مقدمه

Local Area Networks (LAN)



Wide area network (WAN)



Outline

تعریف گراف
 انواع گراف
 گراف بدون جهت
 گراف جهت دار
 الگوریتم های یافتن مسیر بهینه

- Breadth-first Search
- Dijkstra's Method
- Bellman-Ford Method
- Floyd-Warshall Method

Adv. App. of AI and DT

11

تعریف گراف

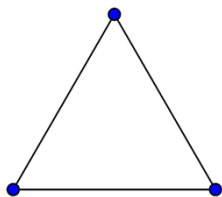
گراف از گره ها و یال ها تشکیل شده است.
 در گراف بدون جهت یال ها جهت ندارند و صرفا دو گره را به هم وصل می کنند.
 گراف دارای انواع متنوعی است:

– Complete graph

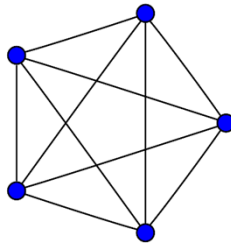
They are denoted by K_n , they contain exactly one edge between each pair of distinct vertices. Number of Edge: $n(n-1)/2$



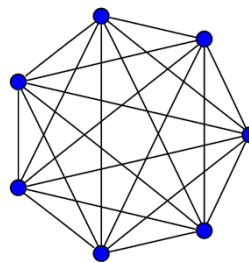
$K_1, 0$



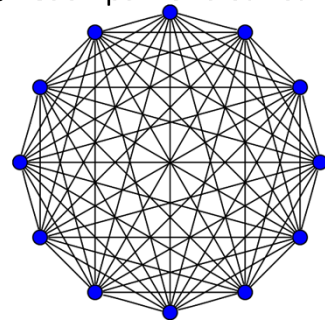
$K_3, 3$



$K_5, 10$



$K_7, 21$



$K_{12}, 66$

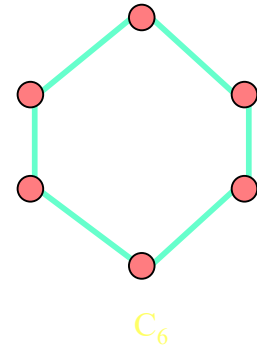
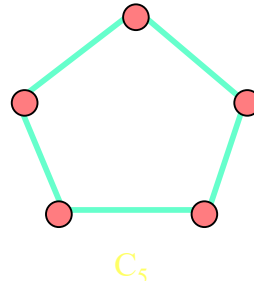
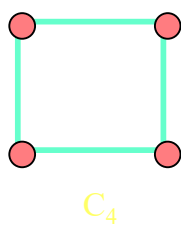
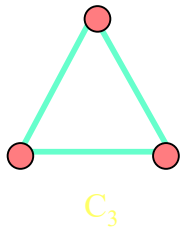
Adv. App. of AI and DT

12

تعريف گراف

– Cycles (ring)

They are denoted by $C_n (n \geq 3)$: they consist of n vertices v_1, v_2, \dots, v_n and edges $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_n, v_{n-1}\}$ and $\{v_n, v_1\}$



The cycles C_3, C_4, C_5 & C_6

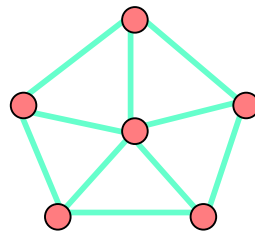
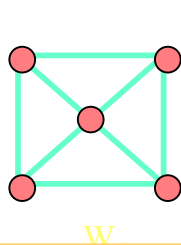
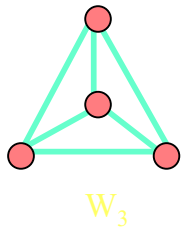
Adv. App. of AI and DT

13

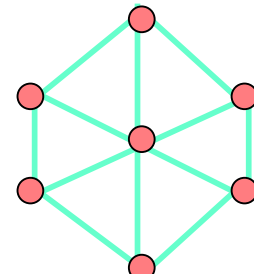
تعريف گراف

– Wheels

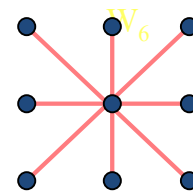
They are denoted by W_n ; they are obtained by adding a vertex to the graphs C_n and connect this vertex to all vertices



The Wheels W_3, W_4, W_5 & W_6



star topology



Adv. App. of AI and DT

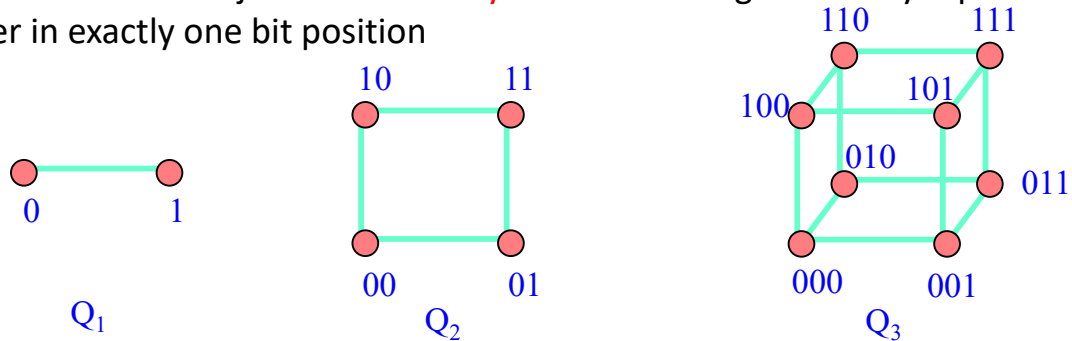
14

تعريف گراف

– n-cubes

They are denoted by Q_n , they are graphs that have vertices representing the 2^n bit strings of length n .

Two vertices are adjacent **if and only if** the bits strings that they represent differ in exactly one bit position



The n-cube Q_1, Q_2, Q_3

Adv. App. of AI and DT

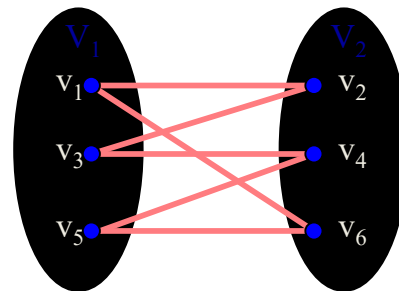
15

تعريف گراف

• Bipartite graph

A simple graph is called **bipartite** if its vertex set V can be partitioned into 2 disjoint sets V_1 and V_2 such that every edge in the graph connects a vertex in V_1 and a vertex in V_2 (so that no edge in G connects either 2 vertices in V_1 or 2 vertices in V_2).

- **Example:** C_6 is bipartite, since its vertex set can be partitioned into the 2 sets $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ and $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, and every edge of C_6 connects a vertex in V_1 and a vertex in V_2 .
- **Example:** The star topology is equivalent to a $K_{1,n}$ complete bipartite graph
- **Example:** K_3 is not bipartite. Why?



Adv. App. of AI and DT

16

تعريف گراف

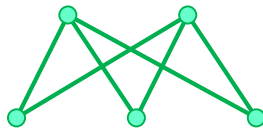
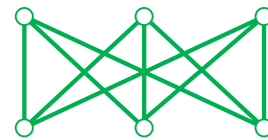
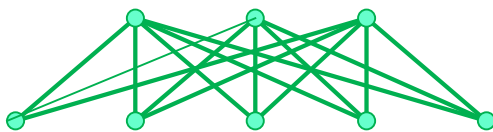
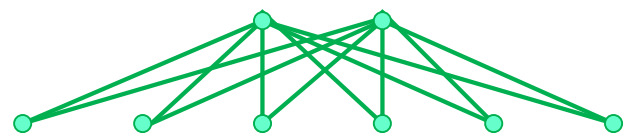
– Characterization of bipartite graph

- A graph is bipartite if and only if it is possible to color the vertices of the graph with at most 2 colors so that no 2 adjacent vertices have the same color
- **Example:** Complete bipartite graphs: they are denoted by $K_{m,n}$. Their vertices set is partitioned into 2 subsets of m and n vertices, respectively. There is an edge between 2 vertices if and only if one vertex is in the first subset and the other vertex is in the second subset.

Adv. App. of AI and DT

17

تعريف گراف

 $K_{2,3}$  $K_{3,3}$  $K_{3,5}$  $K_{2,6}$

Some complete bipartite graphs

Adv. App. of AI and DT

18

Representing Graphs & Graph Isomorphism

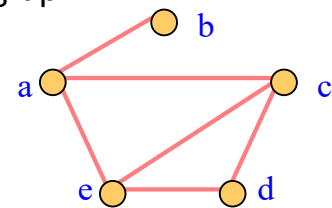
- Representing Graph
 - Goal: Consists of choosing the most convenient representation of a graph
 - We need to determine whether 2 graphs are **isomorphic**, this problem is important in graph theory
 - List all the edges of the graph (no multiple edges)
 - Use **adjacency list**, which specifies the vertices that are adjacent to each vertex of the graph

Adv. App. of AI and DT

19

Representing Graphs & Graph Isomorphism (9.3) (cont.)

- **Example**: Use adjacency lists to describe this simple graph.



Solution:

Vertex	Adjacent vertices
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Adv. App. of AI and DT

20

Representing Graphs & Graph Isomorphism (9.3) (cont.)

- Adjacency matrices
 - To simplify computation, graphs can be represented using matrices
 - Adjacency matrix
 - Incident matrix
 - The **adjacency matrix** is defined as $A = [a_{ij}]$ such that

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \text{ is an edge of } G \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Adv. App. of AI and DT

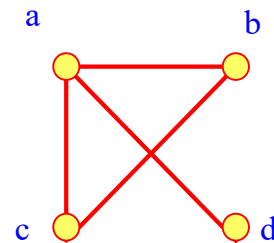
21

Representing Graphs & Graph Isomorphism (9.3) (cont.)

- **Example:** Use an adjacency matrix to represent this graph:

Solution: We order the vertices a, b, c, d.
The matrix representing this graph is

$$\begin{array}{l} a = v_1 \\ b = v_2 \\ c = v_3 \\ d = v_4 \end{array} \begin{bmatrix} e_a & e_b & e_c & e_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

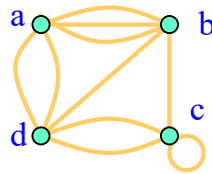


Adv. App. of AI and DT

22

Representing Graphs & Graph Isomorphism (9.3) (cont.)

- In case of pseudographs, the adjacency matrix is not a binary matrix but is formed of elements that represent the number of edges between 2 vertices
- **Example:** Use an adjacency matrix to represent this pseudograph:



Solution: The adjacency matrix using the ordering of vertices a, b, c, d is:

$$\begin{array}{l}
 a = v_1 \\
 b = v_2 \\
 c = v_3 \\
 d = v_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 e_a \quad e_b \quad e_c \quad e_d \\
 \begin{bmatrix}
 0 & 3 & 0 & 2 \\
 3 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 2 \\
 2 & 1 & 2 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Adv. App. of AI and DT

23

Representing Graphs & Graph Isomorphism (9.3) (cont.)

- Incidence matrices

- Let $G = (V, E)$ be an undirected graph.
- Incidence matrices are defined by the matrix $M = [m_{ij}]$ such that

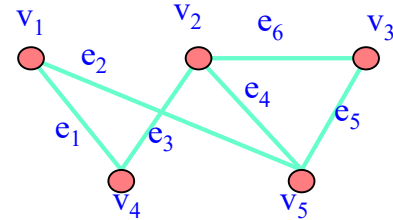
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if edge } e_j \text{ is incident with vertex } v_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Adv. App. of AI and DT

24

Representing Graphs & Graph Isomorphism (9.3) (cont.)

– **Example:** Using an incidence matrix, represent the following undirected graph:



Solution:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	1
v_3	0	0	0	0	1	1
v_4	1	0	1	0	0	0
v_5	0	1	0	1	1	0

Adv. App. of AI and DT

25

Outline

تعریف گراف
 انواع گراف
 گراف بدون جهت
 گراف جهت دار
 الگوریتم های یافتن مسیر بهینه

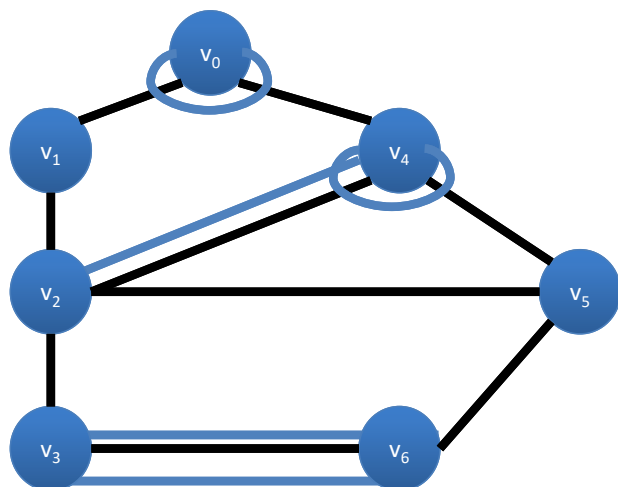
- Breadth-first Search
- Dijkstra's Method
- Bellman-Ford Method
- Floyd-Warshall Method

Adv. App. of AI and DT

26

Parallel Edges and Loop

$G = (V, E)$



Parallel Edges Represented by the same pair of vertices.

Loop

Edges that connect a vertex to itself.

Simple Graphs

Graphs without parallel edges and without loops.

Degree of a Vertex

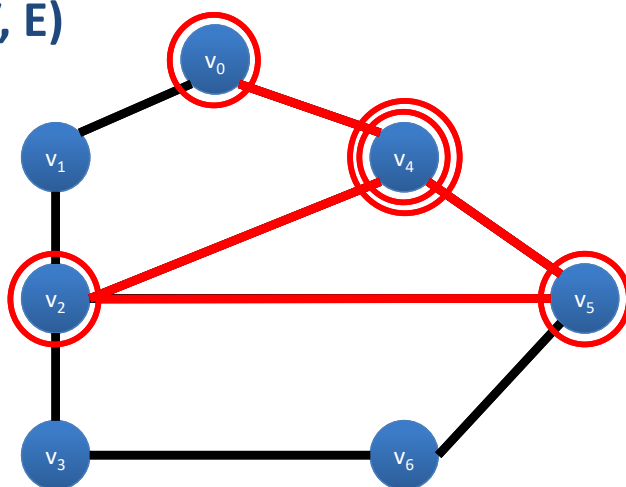
Number of edges incident on the vertex ($\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_5) = 3$)

Adv. App. of AI and DT

27

Walk (پیمایش)

$G = (V, E)$



Length of walk = 4
(Number of edges)

Sequence $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$

$v_0, (v_0, v_4), v_4, (v_4, v_2), v_2, (v_2, v_5), v_5, (v_5, v_4), v_4$

Adv. App. of AI and DT

28

Length of a Walk

$G = (V, E)$

$l: E \rightarrow \mathbb{R}$

Sum of lengths of all edges: $\sum_i l(e_i)$

Length of above walk = $4+2+5-2+4 = 13$

29

Path (مسیر)

$G = (V, E)$

Sequence $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$

Vertices v_0, v_1, \dots, v_k are distinct

30

Outline

تعریف گراف
 انواع گراف
 گراف بدون جهت
 گراف جهت دار
 الگوریتم های یافتن مسیر بهینه

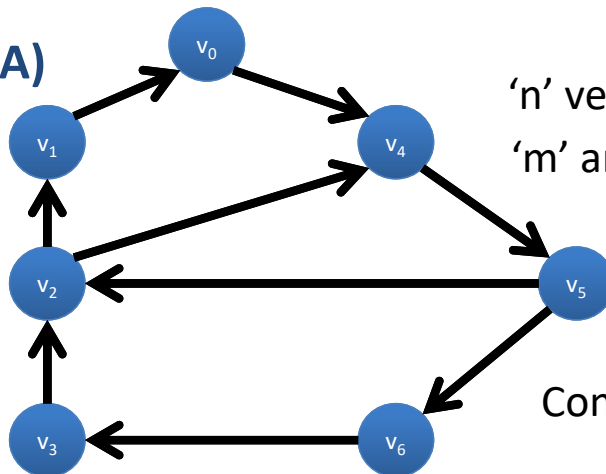
- Breadth-first Search
- Dijkstra's Method
- Bellman-Ford Method
- Floyd-Warshall Method

Adv. App. of AI and DT

31

Directed Graphs (Digraphs)

$D = (V, A)$



'n' vertices or nodes V

'm' arcs A: ordered pairs from V

Connected by an arc $a = (u, v)$.

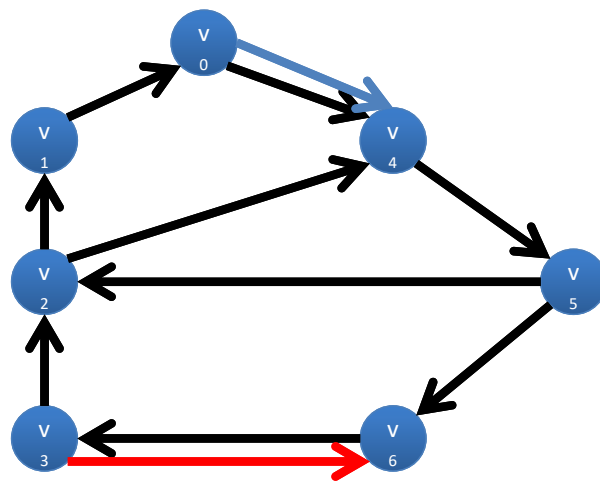
' v_0 ' is the inneighbor of ' v_4 '

' v_4 ' is the outneighbor of ' v_0 '

Adv. App. of AI and DT

32

Parallel Arcs



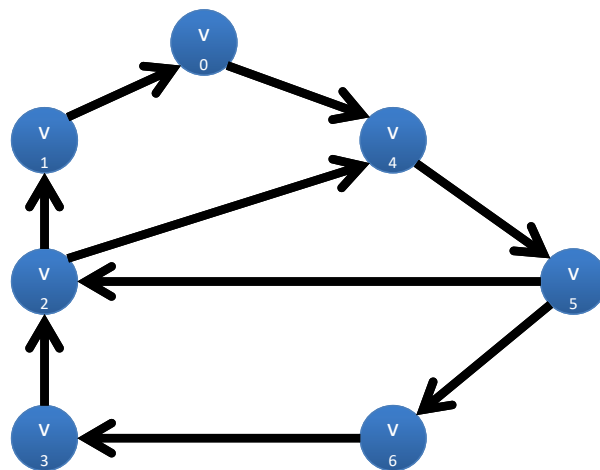
$$D = (V, A)$$

Represented by the same ordered pair of vertices.

Adv. App. of AI and DT

33

Simple Graphs



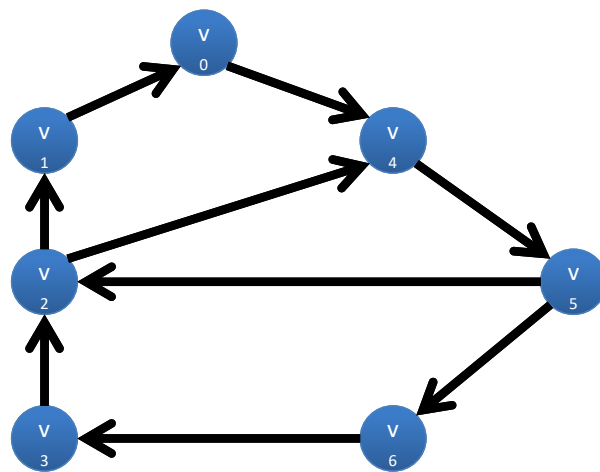
$$D = (V, A)$$

Graphs without parallel arcs and without loops.

Adv. App. of AI and DT

34

Underlying Undirected Graph



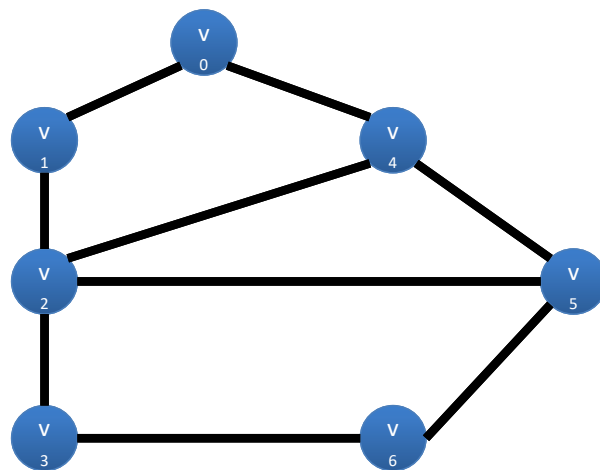
$$D = (V, A)$$

Graphs obtained by ignoring orientation of arcs.

Adv. App. of AI and DT

35

Underlying Undirected Graph



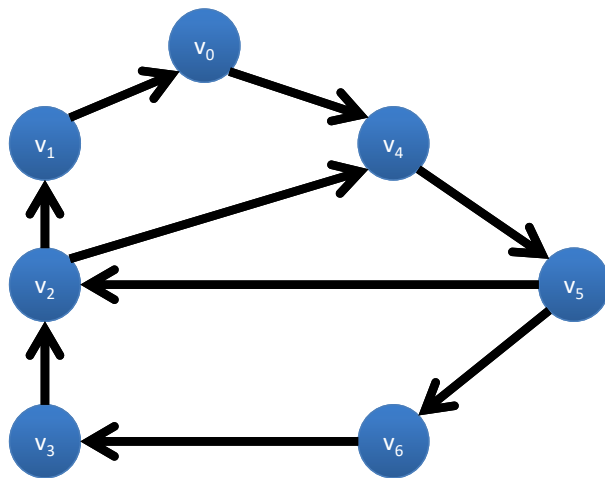
$$G = (V, E)$$

Graphs obtained by ignoring orientation of arcs.

Adv. App. of AI and DT

36

Indegree of a Vertex



$$D = (V, A)$$

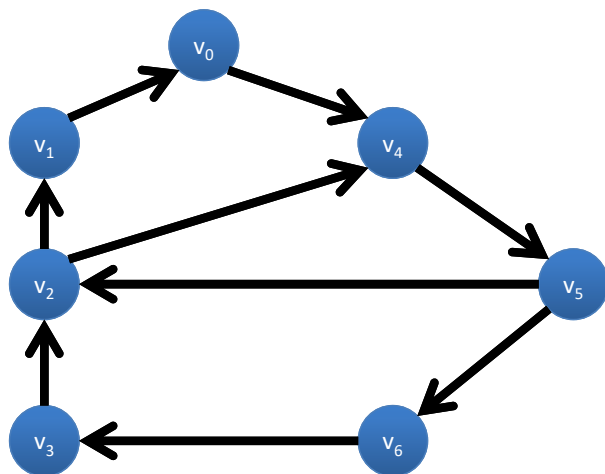
Number of arcs entering the vertex.

$$\text{indeg}(v_0) = 1, \text{indeg}(v_1) = 1, \text{indeg}(v_4) = 2, \dots$$

Adv. App. of AI and DT

37

Outdegree of a Vertex



$$D = (V, A)$$

Number of arcs leaving the vertex.

$$\text{outdeg}(v_0) = 1, \text{outdeg}(v_1) = 1, \text{outdeg}(v_2) = 2, \dots$$

Adv. App. of AI and DT

38

Outline

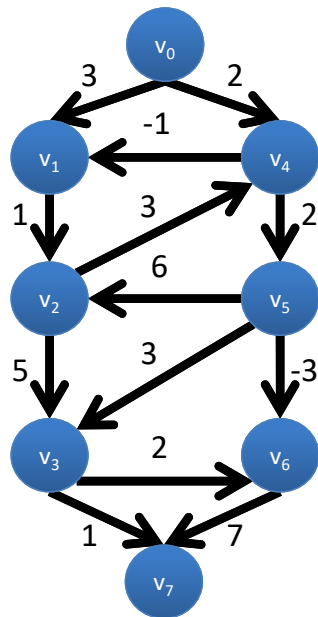
تعریف گراف
انواع گراف
گراف بدون جهت
گراف جهت دار
الگوریتم های یافتن مسیر بهینه

- Breadth-first Search
- Dijkstra's Method
- Bellman-Ford Method
- Floyd-Warshall Method
- A* (A-Star) Method
- Johnson Method
- Bidirectional)BFS(Method
- Genetic Algorithm (GA)
- Ant Colony Optimization (ACO)

Adv. App. of AI and DT

39

The Shortest Path Problem



Find the shortest path from s to t

Length of path =
 Σ Length of arcs

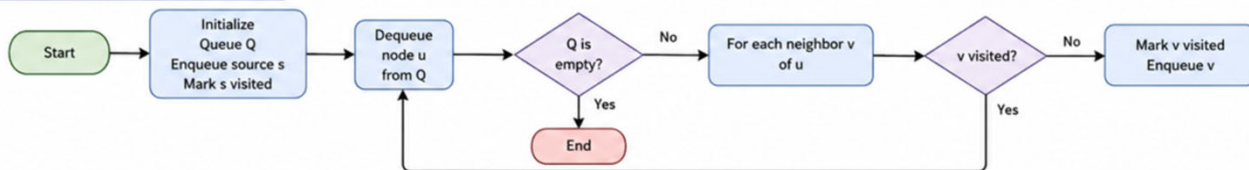
Adv. App. of AI and DT

40

Breadth-first Search

الگوریتم BFS جستجو را از رأس مبدأ آغاز می‌کند و ابتدا تمام همسایه‌های مستقیم آن را بررسی می‌کند، سپس همسایه‌های همسایه‌ها را و به همین ترتیب لایه به لایه در گراف پیش می‌رود. برای این کار از یک **صف (Queue)** استفاده می‌شود تا رأس‌ها به ترتیب ورود پردازش شوند. از آنجا که تمام رأس‌های واقع در فاصله ۱، سپس فاصله ۲ و ... بررسی می‌شوند، BFS در گراف‌های بدون وزن کوتاه‌ترین مسیر را بر حسب تعداد یال‌ها پیدا می‌کند.

1) Breadth-First Search (BFS)



مزایا
ساده و سریع، تضمین یافتن
کوتاه‌ترین مسیر در گراف بدون
وزن، حافظه کم

معایب
برای گراف‌های وزن‌دار مناسب
نیست

پیچیدگی زمانی
 $O(V+E)$

کاربرد
شبکه‌های اجتماعی، جستجوی
وب، مسیریابی در گراف‌های
بدون وزن، بازی‌ها

Adv. App. of AI and DT

41

Outline

تعریف گراف
انواع گراف
گراف بدون جهت
گراف جهت دار
الگوریتم‌های یافتن مسیر بهینه

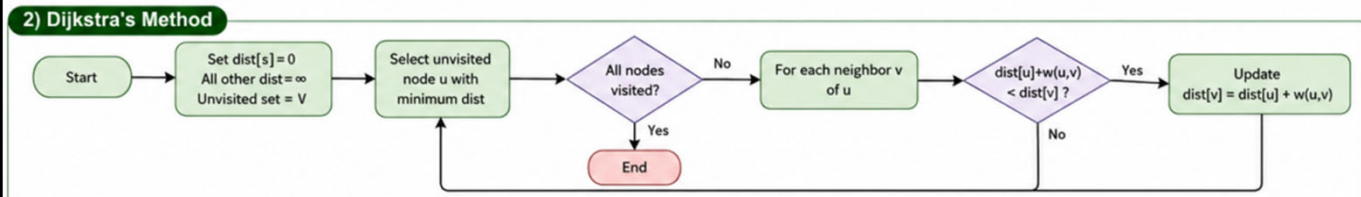
- Breadth-first Search
- Dijkstra's Method
- Bellman-Ford Method
- Floyd-Warshall Method
- A* (A-Star) Method
- Johnson Method
- Bidirectional BFS Method
- Genetic Algorithm (GA)
- Ant Colony Optimization (ACO)

Adv. App. of AI and DT

42

Dijkstra's Method

الگوریتم دایکسترا برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از یک مبدأ به تمام رأس‌های دیگر در گراف‌های دارای وزن مثبت استفاده می‌شود. در هر مرحله، رأسی که کمترین فاصله موقت از مبدأ را دارد انتخاب می‌شود و فاصله همسایگان آن به‌روزرسانی می‌گردد (عمل Relaxation). این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که فاصله همه رأس‌ها قطعی شود. ایده اصلی دایکسترا این است که وقتی رأسی با کمترین فاصله انتخاب شد، دیگر مسیر کوتاه‌تری برای آن وجود نخواهد داشت.



مزایا	معایب	پیچیدگی زمانی	کاربرد
کوتاه‌ترین مسیر را با دقت بالا پیدا می‌کند، برای شبکه‌های وزن‌دار مثبت بسیار کارآمد است	با وزن‌های منفی کار نمی‌کند	Heap با $O(E \log V)$	کاربرد GPS، مسیریابی جاده‌ای، شبکه‌های کامپیوتری، سیستم‌های حمل و نقل

Adv. App. of AI and DT

43

Outline

تعریف گراف
انواع گراف
گراف بدون جهت
گراف جهت‌دار
الگوریتم‌های یافتن مسیر بهینه

- Breadth-first Search
- Dijkstra's Method
- Bellman-Ford Method
- Floyd-Warshall Method
- A* (A-Star) Method
- Johnson Method
- Bidirectional)BFS(Method
- Genetic Algorithm (GA)
- Ant Colony Optimization (ACO)

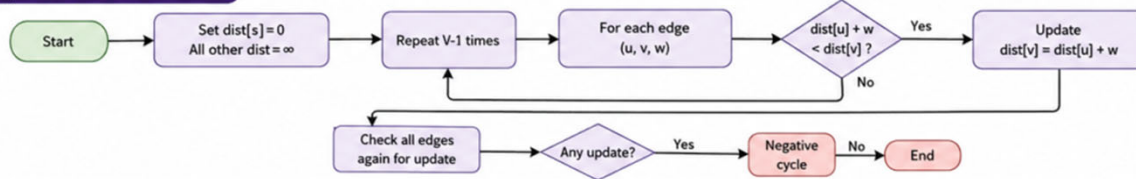
Adv. App. of AI and DT

44

Bellman-Ford Method

الگوریتم بلمن-فورد نیز کوتاه‌ترین مسیر از یک مبدأ را پیدا می‌کند، اما برخلاف دایکسترا قادر به کار با یال‌های دارای وزن منفی است. روش کار آن این است که تمام یال‌های گراف به تعداد $V-1$ بار (تعداد رأس‌ها منهای یک) بررسی و Relax می‌شوند. با این کار تأثیر مسیرهای طولانی‌تر به تدریج در فاصله‌ها منعکس می‌شود. پس از پایان تکرارها، یک بار دیگر همه یال‌ها بررسی می‌شوند؛ اگر هنوز بتوان فاصله‌ای را کاهش داد، وجود چرخه با وزن منفی تشخیص داده می‌شود

3) Bellman-Ford Method



مزایا
وزن‌های منفی را پشتیبانی
می‌کند، چرخه‌های منفی را
تشخیص می‌دهد

معایب
کندتر از دایکسترا است

پیچیدگی زمانی
($O(VE)$)

کاربرد
پروتکل‌های مسیریابی مانند
RIP، تحلیل اقتصادی و مالی،
شبکه‌هایی با هزینه‌های منفی

Adv. App. of AI and DT

45

Outline

تعریف گراف
انواع گراف
گراف بدون جهت
گراف جهت دار
الگوریتم‌های یافتن مسیر بهینه

- Breadth-first Search
- Dijkstra's Method
- Bellman-Ford Method
- Floyd-Warshall Method
- A* (A-Star) Method
- Johnson Method
- Bidirectional BFS Method
- Genetic Algorithm (GA)
- Ant Colony Optimization (ACO)

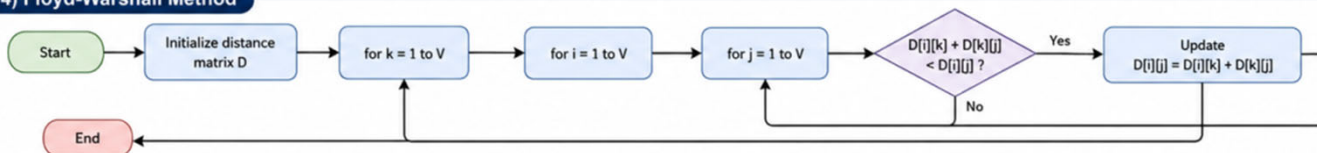
Adv. App. of AI and DT

46

Floyd-Warshall Method

الگوریتم فلویید-وارشال کوتاه‌ترین مسیر بین تمام جفت رأس‌های گراف را به طور همزمان محاسبه می‌کند. این روش با تشکیل یک ماتریس فاصله شروع می‌شود و سپس به صورت سیستماتیک بررسی می‌کند که آیا عبور از یک رأس واسطه k می‌تواند مسیر بین دو رأس i و j را کوتاه‌تر کند یا خیر. اگر مسیر $i \rightarrow k \rightarrow j$ کوتاه‌تر باشد، مقدار ماتریس به‌روزرسانی می‌شود. پس از بررسی تمام رأس‌های واسطه، ماتریس نهایی شامل کوتاه‌ترین فاصله بین هر دو رأس گراف خواهد بود.

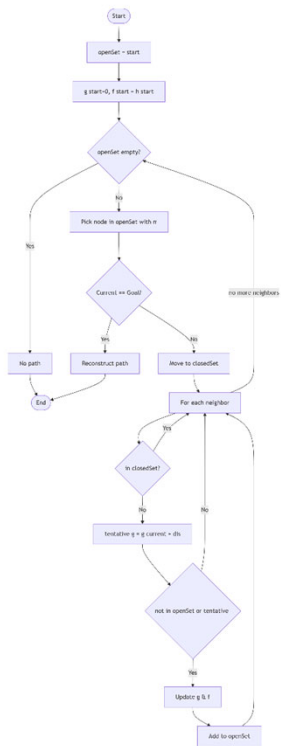
4) Floyd-Warshall Method



<p>مزایا</p> <p>کوتاه‌ترین مسیر بین همه جفت رأس‌ها را محاسبه می‌کند، پیاده‌سازی ساده</p>	<p>معایب</p> <p>حافظه و زمان زیاد برای گراف‌های بزرگ</p>	<p>پیچیدگی زمانی</p> <p>$(O(V^3))$</p>	<p>کاربرد</p> <p>تحلیل شبکه‌های کوچک تا متوسط، حمل‌ونقل شهری، ماتریس فاصله بین تمام نقاط</p>
--	--	---	--

A* (A-Star) Method

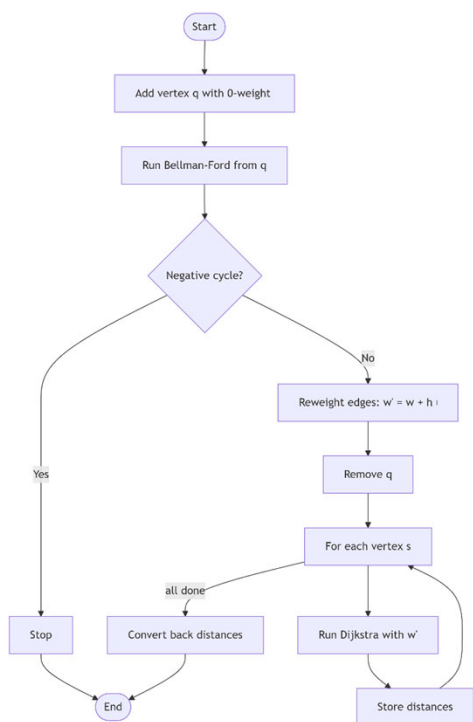
الگوریتم A^* نسخه هوشمند دایکسترا است. علاوه بر هزینه طی شده از مبدأ $g(n)$ ، از یک تابع تخمین فاصله تا مقصد $h(n)$ نیز استفاده می‌کند و گرهی را انتخاب می‌کند که مقدار $f(n) = g(n) + h(n)$ آن کمینه باشد. اگر تابع تخمین مناسب باشد، A^* بسیار سریع‌تر از دایکسترا به مقصد می‌رسد و همچنان کوتاه‌ترین مسیر را تضمین می‌کند.



<p>مزایا</p> <p>بسیار سریع‌تر از دایکسترا در صورت داشتن تابع Heuristic مناسب</p>	<p>معایب</p> <p>کیفیت وابسته به Heuristic است</p>	<p>پیچیدگی زمانی</p> <p>حدود $O(E)$ تا نامایی</p>	<p>کاربرد</p> <p>ناوبری ربات‌ها، بازی‌های رایانه‌ای، GPS پیشرفته</p>
--	---	--	--

Johnson Method

الگوریتم جانسون برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین همه جفت رأس‌ها در گراف‌های بزرگ و تنک طراحی شده است. ابتدا با اجرای Bellman-Ford وزن یال‌ها را بازتعریف می‌کند تا همه وزن‌ها غیرمنفی شوند. سپس از هر رأس یک بار الگوریتم دایکسترا اجرا می‌شود. این روش نسبت به Floyd-Warshall برای گراف‌های بزرگ بسیار سریع‌تر است.



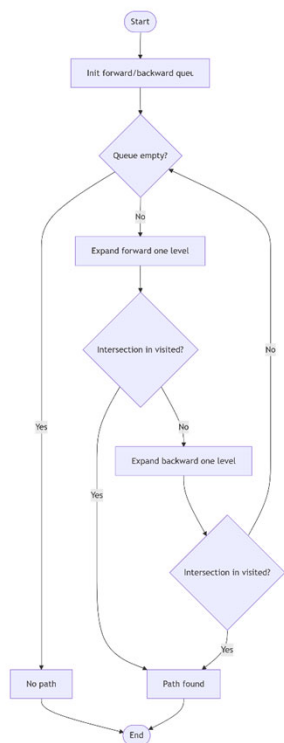
مزایا	معایب	پیچیدگی زمانی	کاربرد
برای گراف‌های تنک و همه جفت مسیرها مناسب، وزن منفی را پشتیبانی می‌کند	پیاده‌سازی پیچیده‌تر	$O(VE + V^2 \log V)$	شبکه‌های بزرگ و تنک

Adv. App. of AI and DT

49

Bidirectional (BFS) Method

در این روش به جای جستجو فقط از مبدأ، دو جستجوی BFS همزمان از مبدأ و مقصد آغاز می‌شوند. هنگامی که دو جبهه جستجو به هم برسند، مسیر کامل ساخته می‌شود. چون عمق جستجو تقریباً نصف می‌شود، تعداد گره‌های بررسی شده به شدت کاهش می‌یابد و سرعت افزایش می‌یابد.



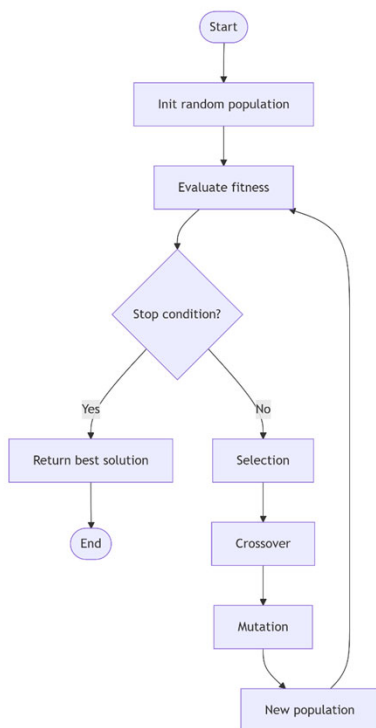
مزایا	معایب	پیچیدگی زمانی	کاربرد
نیاز به دانستن مبدأ و تقریباً ریشه دوم BFS از نظر تعداد گره‌های بازدید شده	مقصد دارد	حدود $O(b^{d/2})$	مسیریابی در شبکه‌های بزرگ بدون وزن

Adv. App. of AI and DT

50

Genetic Algorithm (GA)

الگوریتم ژنتیک از فرآیند تکامل زیستی الهام گرفته است. ابتدا مجموعه‌ای از جواب‌های تصادفی (جمعیت) تولید می‌شود. سپس بهترین جواب‌ها انتخاب شده، با هم ترکیب (Crossover) می‌شوند و تغییرات تصادفی (Mutation) روی آنها اعمال می‌شود. این فرآیند نسل به نسل تکرار می‌شود تا پاسخ‌های بهتری تولید شوند. در مسائل پیچیده بهینه‌سازی که فضای جستجو بسیار بزرگ است کاربرد فراوانی دارد.

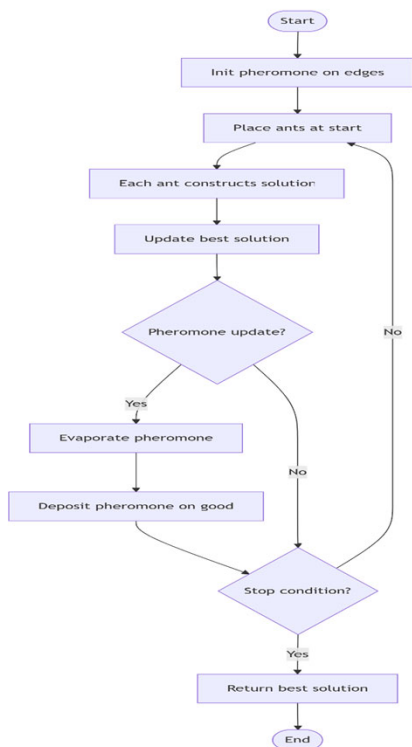


Adv. App. of AI and DT

51

Ant Colony Optimization (ACO)

الگوریتم کلونی مورچگان از رفتار مورچه‌ها در یافتن کوتاه‌ترین مسیر الهام گرفته است. مورچه‌های مصنوعی روی گراف حرکت می‌کنند و روی مسیرهای طی شده فرومون مجازی برجا می‌گذارند. مسیرهای بهتر فرومون بیشتری دریافت می‌کنند و احتمال انتخاب آنها در تکرارهای بعدی افزایش می‌یابد. با گذشت زمان، جمعیت مورچه‌ها به سمت مسیرهای بهینه همگرا می‌شود. این روش در مسائل مسیریابی، زمان‌بندی و بهینه‌سازی ترکیبی بسیار موفق بوده است.



Adv. App. of AI and DT

52

الگوریتم	مزایا	معایب	پیچیدگی زمانی	کاربرد
Breadth-First Search (BFS)	ساده و سریع، تضمین یافتن کوتاه‌ترین مسیر در گراف بدون وزن، حافظه کم	برای گراف‌های وزن‌دار مناسب نیست	$O(V+E)$	شبکه‌های اجتماعی، جستجوی وب، مسیریابی در گراف‌های بدون وزن، بازی‌ها
Dijkstra	کوتاه‌ترین مسیر را با دقت بالا پیدا می‌کند، برای شبکه‌های وزن‌دار مثبت بسیار کارآمد است	با وزن‌های منفی کار نمی‌کند	$O(E \log V)$	GPS، مسیریابی جاده‌ای، شبکه‌های کامپیوتری، سیستم‌های حمل و نقل
Bellman-Ford	وزن‌های منفی را پشتیبانی می‌کند، چرخه‌های منفی را تشخیص می‌دهد	کندتر از دایکسترا است	$O(VE)$	پروتکل‌های مسیریابی مانند RIP، تحلیل اقتصادی و مالی، شبکه‌هایی با هزینه‌های منفی
Floyd-Warshall	کوتاه‌ترین مسیر بین همه جفت رأس‌ها را محاسبه می‌کند، پیاده‌سازی ساده	حافظه و زمان زیاد برای گراف‌های بزرگ	$O(V^3)$	تحلیل شبکه‌های کوچک تا متوسط، حمل و نقل شهری، ماتریس فاصله بین تمام نقاط
A*	بسیار سریع‌تر از دایکسترا در صورت داشتن تابع Heuristic مناسب	کیفیت وابسته به Heuristic است	حدود $O(E)$ تا نمایی	ناوبری ربات‌ها، بازی‌های رایانه‌ای، GPS پیشرفته
Johnson	برای گراف‌های تنگ و همه‌جفت‌مسیرها مناسب، وزن منفی را پشتیبانی می‌کند	پیاده‌سازی پیچیده‌تر	$O(VE + V^2 \log V)$	شبکه‌های بزرگ و تنگ
Bidirectional BFS	تقریباً ریشه دوم از نظر تعداد گره‌های بازدید شده	نیاز به دانستن مبدأ و مقصد دارد	حدود $O(b^{d/2})$	مسیریابی در شبکه‌های بزرگ بدون وزن

Adv. App. of AI and DT

53

Time Complexity

مقایسه مقیاس پذیری

برای گرافی با $V = 10^5, E = 10^6$ تقریباً:

الگوریتم	تعداد عملیات
BFS	(10^6)
Dijkstra	(10^7)
Bellman-Ford	(10^{11})
Floyd-Warshall	(10^{15})

برنامه مقایسه الگوریتمهای مختلف

در یک گراف با پانزده گره از الگوریتم های مختلف برای بهینه کردن مسیر بر حسب طول، زمان، سوخت، قابلیت اعتماد و ترکیبی از آنها در سفر استفاده کنید

معیارها Distance / Time / Fuel / Reliability و تابع هدف چندمعیاره با وزندهی

cases = [

("SHORTEST PATH", (1,0,0,0)),
 ("FASTEST PATH", (0,1,0,0)),
 ("MIN FUEL PATH", (0,0,1,0)),
 ("MOST RELIABLE PATH", (0,0,0,1)),
 ("MULTI OBJECTIVE", (0.35,0.35,0.2,0.1))

]

الگوریتمها :

Dijkstra

A*

Bellman-Ford

Genetic Algorithm (GA)

Ant Colony Optimization (ACO)

برنامه 16 graph best way comparison.py

Adv. App. of AI and DT

55

کتابخانهها

Graph Analysis & Classic Optimization

کتابخانه	سازنده	الگوریتمهای کلیدی	مناسب برای
NetworkX	جامعه متن باز	Dijkstra, A*, Bellman-Ford, MST, TSP, PageRank, Community Detection	تحلیل شبکه، تحقیقات، نمونه سازی
igraph	igraph team	کوتاه ترین مسیر، خوشه بندی، مرکزیت، تشخیص جامعه	تحلیل شبکه های اجتماعی، بیولوژی
NetworkKit	KIT + HU Berlin	مرکزیت، خوشه بندی، مسیریابی موازی	گراف های میلیاردي، پردازش موازی
Graphillion	JST Japan	جستجو، بهینه سازی و شمارش روی مجموعه ای از گرافها	ارزیابی شبکه برق، تحلیل راه آهن

Graph Neural Networks (GNN)

کتابخانه	سازنده	مدل های پشتیبانی شده	مناسب برای
PyTorch Geometric (PyG)	Fey & Lenssen / Stanford	GCN, GAT, GraphSAGE, GIN, MPNN	کشف دارو، شبکه اجتماعی، مولکولها
DGL (Deep Graph Library)	AWS / Carnegie Mellon	GraphSAGE, GAT, GIN, RGCN, HGT	گراف های ناهمگن، بیوانفورماتیک، AlphaFold
Spektral	جامعه متن باز	GCN, GAT, APPNP, GraphSAGE	کاربران TensorFlow/Keras
Jraph	Google DeepMind	با تابع پیام رسانی GNN پیاده سازی انعطاف پذیر	تحقیقات، اکوسیستم JAX

Adv. App. of AI and DT

56

کتابخانه‌ها

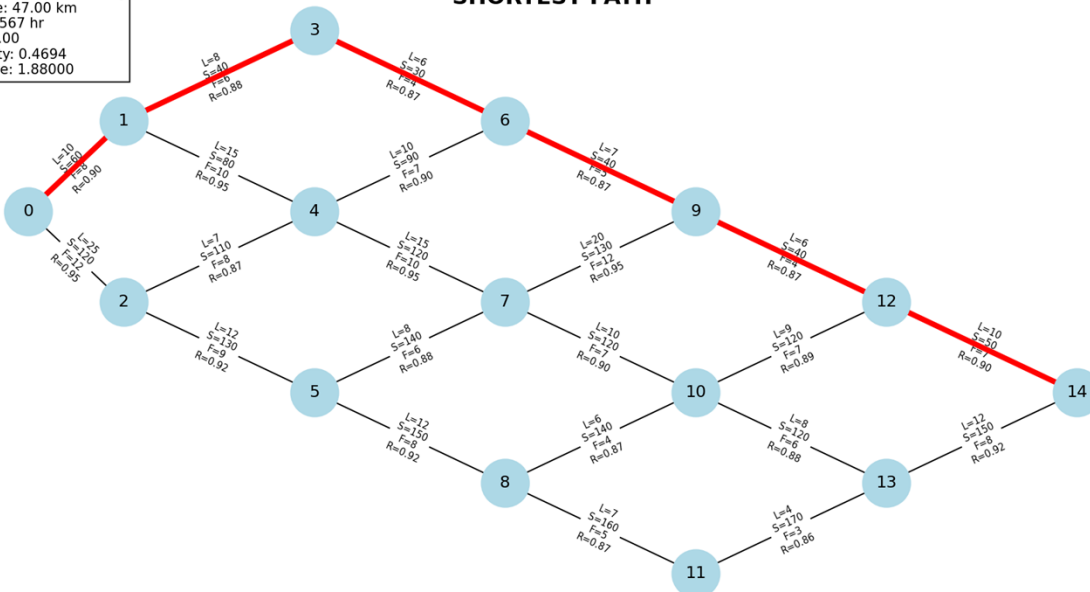
راهنمای انتخاب

نوع مسئله	بهترین کتابخانه
تحلیل گراف کوچک-متوسط، تحقیقات مسیریابی، TSP، VRP، لجستیک	NetworkX
گراف‌های میلیاردي، پردازش موازی CPU	Google OR-Tools
گراف‌های بزرگ روی GPU	NetworkKit
یادگیری عمیق روی گراف (PyTorch)	RAPIDS cuGraph
یادگیری عمیق روی گراف (چند فریمورک)	PyTorch Geometric
بهبودسازی محدب روی گراف	DGL
گراف دانش و تکمیل دانش	SnapVX
	PyKEEN

برنامه مقایسه الگوریتمهای مختلف

Path: [0, 1, 3, 6, 9, 12, 14]
 Distance: 47.00 km
 Time: 3.567 hr
 Fuel: 34.00
 Reliability: 0.4694
 Objective: 1.88000

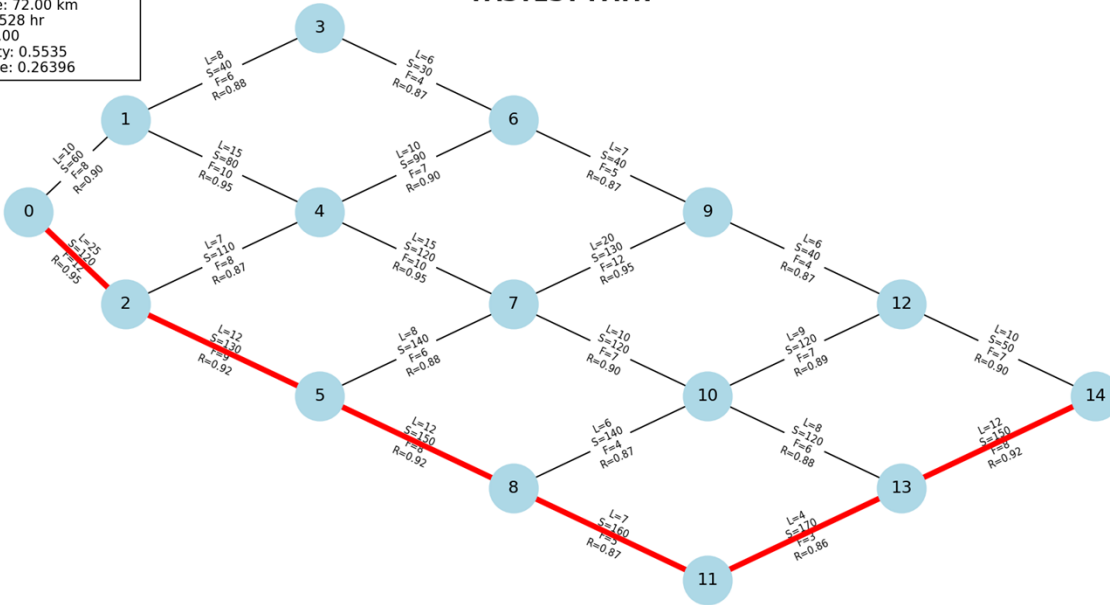
SHORTEST PATH



برنامه مقایسه الگوریتمهای مختلف

Path: [0, 2, 5, 8, 11, 13, 14]
 Distance: 72.00 km
 Time: 0.528 hr
 Fuel: 45.00
 Reliability: 0.5535
 Objective: 0.26396

FASTEST PATH

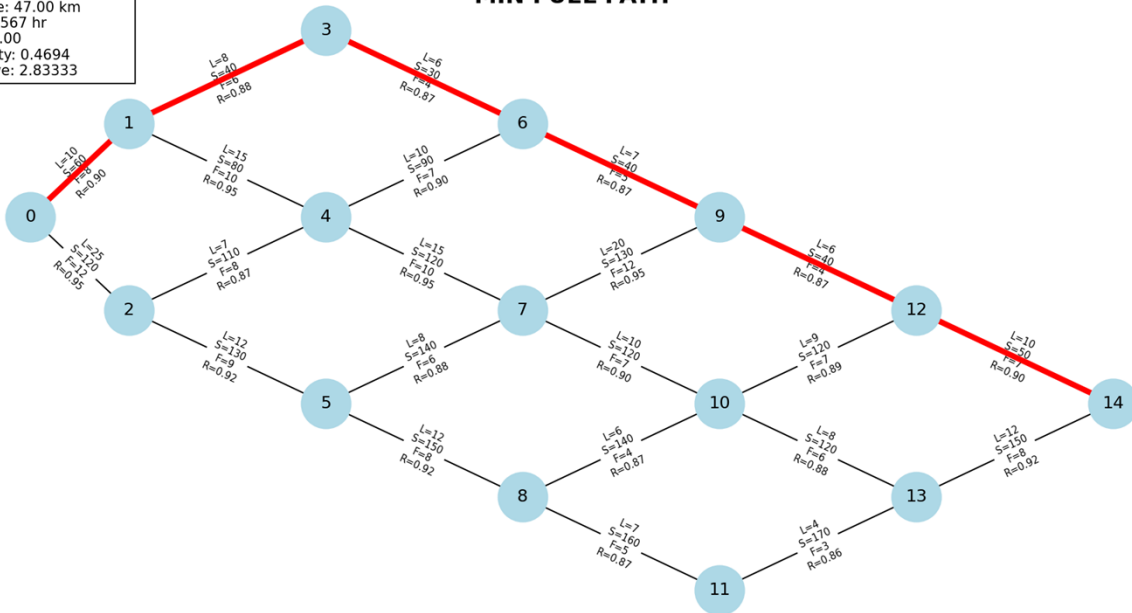


59

برنامه مقایسه الگوریتمهای مختلف

Path: [0, 1, 3, 6, 9, 12, 14]
 Distance: 47.00 km
 Time: 3.567 hr
 Fuel: 34.00
 Reliability: 0.4694
 Objective: 2.83333

MIN FUEL PATH



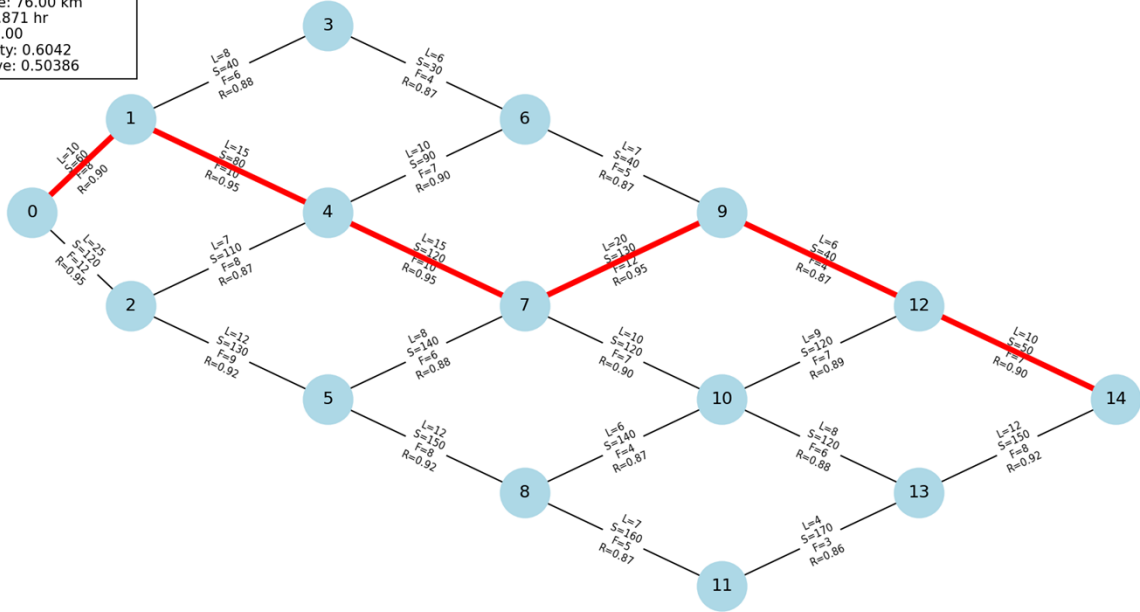
Adv. App. of Al and AI

50

برنامه مقایسه الگوریتمهای مختلف

Path: [0, 1, 4, 7, 9, 12, 14]
 Distance: 76.00 km
 Time: 1.871 hr
 Fuel: 51.00
 Reliability: 0.6042
 Objective: 0.50386

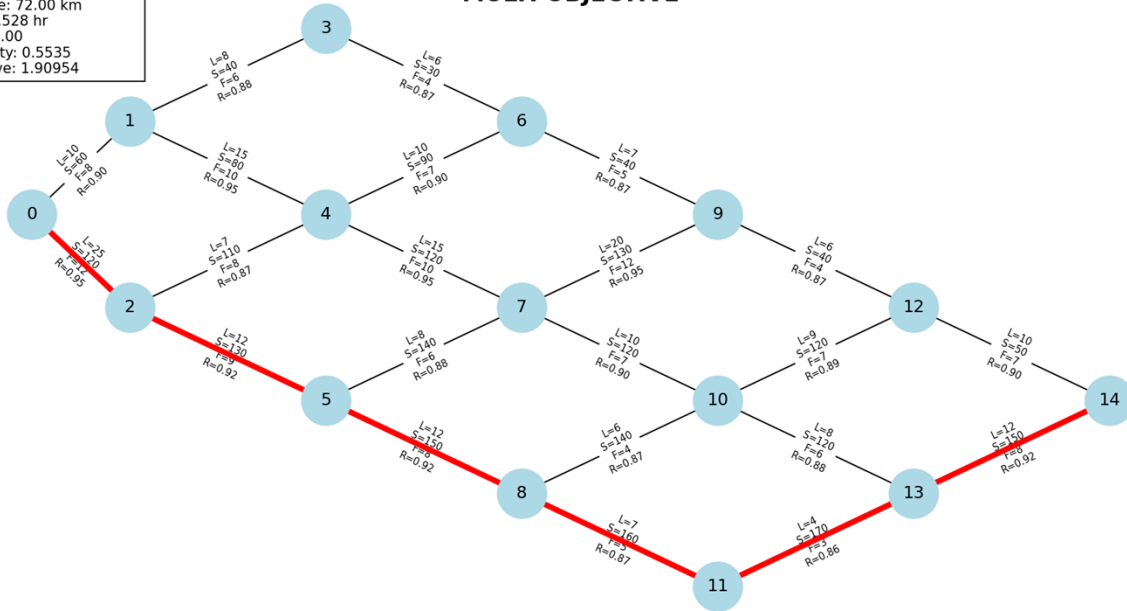
MOST RELIABLE PATH



برنامه مقایسه الگوریتمهای مختلف

Path: [0, 2, 5, 8, 11, 13, 14]
 Distance: 72.00 km
 Time: 0.528 hr
 Fuel: 45.00
 Reliability: 0.5535
 Objective: 1.90954

MULTI OBJECTIVE



نمونه استفاده از گراف در عمران

A spatiotemporal displacement prediction method for InSAR-detected landslides using a graph neural network coupling spatial and temporal features.

Zhang, Y., He, Y., Gao, F., Huo, T., Zhang, Q., Lu, J., & Zhang, L. (2025). *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 16(1).

یک روش مبتنی بر GNN مکانی-زمانی برای پیش‌بینی جابجایی رانش‌های زمین شناسایی شده با InSAR توسعه داده شد که روابط توپولوژیکی مکانی را با ویژگی‌های زمانی پیوند می‌دهد. این روش، رانش زمین را به صورت یک نمودار از دیدگاه ژئومکانیکی نشان می‌دهد، که در آن ساختار زمین‌شناسی و شرایط محیطی، اتصال گره‌ها را کنترل می‌کنند.

نمونه استفاده از گراف در عمران

Controllable and flexible residential floor plan layout design based on multi-agent deep reinforcement learning with layout prior size and similar experience abandon,

Gan Luo, Xuhong Zhou, Liang Feng, Jiepeng Liu, Pengkun Liu, Yunzhu Liao, Wenchen Shan, Hongtuo Qi, *Advanced Engineering Informatics*, Volume 68, Part B, 2025,

یک چارچوب GNN-GAN برای مدل‌سازی چینه‌شناسی زیرسطحی با استفاده از شبکه‌های توجه گراف (GAT) و GraphSAGE توسعه داده شد که داده‌های CPT و داده‌های گمانه را در یک سایت خط مترو سوژو در چین در بر می‌گیرد.

نمونه استفاده از گراف در عمران

Three-dimensional voxel geological modelling for subsurface stratigraphy: a graph convolutional network approach

Wang, L., Pan, Q., Su, D., & Huang, S. (2025). Canadian Geotechnical Journal, 62, 1–15.

یک نمودار توپولوژیکی با نقاط مکانی به عنوان گره ساخته شده و انواع خاک و مختصات مکانی به عنوان ویژگی‌های گره گذاری می‌شوند و همبستگی‌های مکانی از طریق یال‌های وزن‌دار تعیین می‌شوند.

Adv. App. of AI and DT

65

نمونه استفاده از گراف در عمران

Graph Neural Network-based surrogate model for granular flows.

Choi, Y., & Kumar, K. (2024). Computers and Geotechnics, 166, 106015.

این مقاله از GNN برای نمایش ذرات به عنوان گره و تعاملات آنها به عنوان لبه استفاده می‌کند. این روش دینامیک فروپاشی دانه‌ای را با دقت پیش‌بینی می‌کند و سرعت محاسباتی آن صدها برابر بیشتر از روش‌های سنتی است.

Adv. App. of AI and DT

66

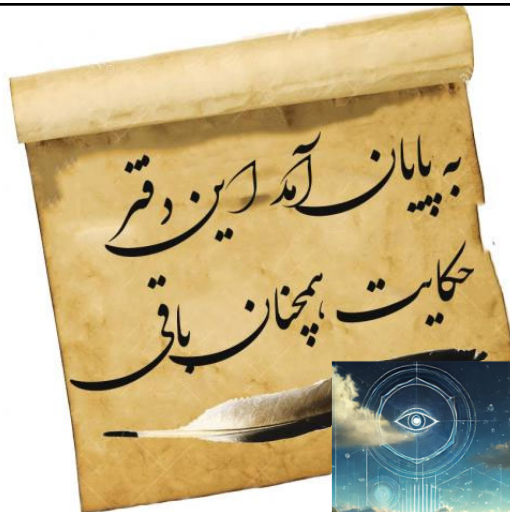
تمرین

تمرین : یک مساله عمرانی را به روش گراف حل نمایید

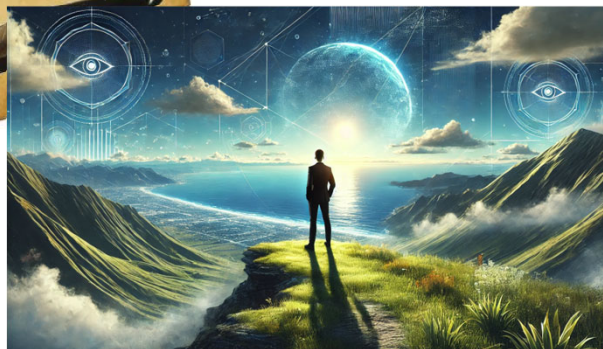
- حداقل ۲۰ گره در نظر بگیرید
- گره ها از یک تا ۵ حداقل یال داشته باشند
- گراف بدون جهت یا جهت دار می تواند باشد

Adv. App. of AI and DT

67



به دنبال آرزوهایم خواهیم رفت
مسیر کم نمیرم عهد بسته ام قبل از



Adv. App. of AI and DT

68

Flowchart



الگوریتم
 BFS
 Dijkstra
 Bellman-Ford
 Floyd-Warshall

کاربرد
 گراف بدون وزن
 وزن‌های مثبت
 وزن‌های منفی
 همه جفت رأس‌ها

پیچیدگی
 $O(V+E)$
 $O(E(\log V))$
 $O(VE)$
 $O(V^3)$

Adv. App. of AI and DT

69

