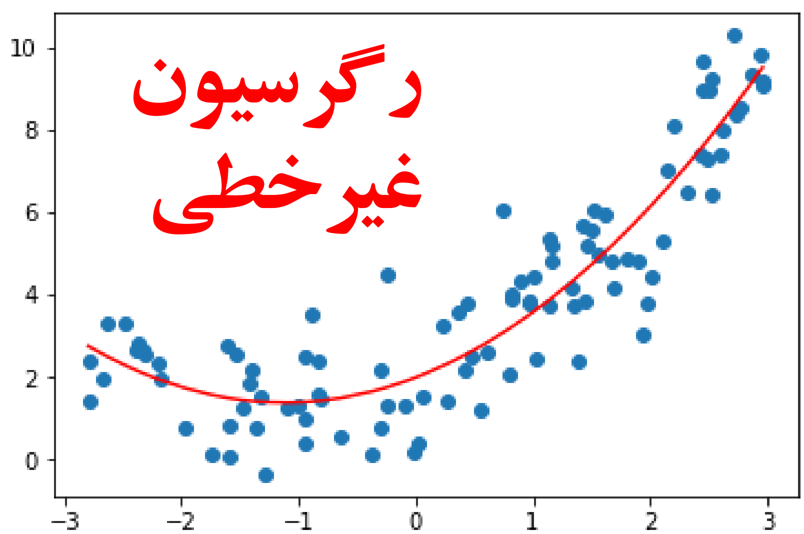
Artificiel Intelligence and Soft computing

K.N.TOOSI University of Technology

Artificial Intelligence 1

Artificiel Intelligence and Soft computing

K.N.TOOSI University of Technology



Artificial Intelligence 2

رگرسیون یک متغیره

آنالیز رگرسیون (واکاوی وایازشی)

One feature (Univariate**).**

Size (m²) x	Price (Milliard Toman) y
210.4	46
141.6	23.2
153.4	31.5
85.2	17.8
…	…

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x$$

رگرسیون خطی تک متغیره

متغیر x

رگرسیون چند متغیره

Multiple features (variables). آنالیز رگرسیون (واکاوی وایازشی)

متغیرها →	Size (m²) x_1	Number of bedrooms x_2	Number of floors x_3	Age of home (years) x_4	Price (Milliard Toman) y
	210.4	5	1	45	46
	141.6	3	2	40	23.2
	153.4	3	2	30	31.5
	85.2	2	1	36	17.8
	…	…	…	…	…

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n$$

متغیر x_i یک بردار است

هر متغیر j نمونه یا مثال دارد که با آنها برنامه آموزش خواهد دید تا y را حدس بزنند

رگرسیون چند متغیره

Multiple features (variables).

متغیرها →	Size (m^2) x_1	Number of bedrooms x_2	Number of floors x_3	Age of home (years) x_4	Price (Milliard Toman) y
	210.4	5	1	45	46
	141.6	3	2	40	23.2
مثال سوم → X^3	153.4	3	2	30	31.5
	85.2	2	1	36	17.8
	300	4	1	38	54
	289	5	3	20	60
	…	…	…	…	…

Notation:

n = number of features — $n = 4$ — تعداد متغیرها

$x^{(i)}$ = input (features) of i^{th} training example. — $x^3 = [153.4\ 3\ 2\ 30]^T$

$x_j^{(i)}$ = value of feature j in i^{th} training example. — $x^3_4 = 30$

نام متغیر در زیرنویس و شماره مثال در بالانویس می آید

$y = [46\ 23.2\ 31.5\ 17.8\ 54\ 60\ \ldots]^T$

رگرسیون چند متغیره

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n$$

$$h_\theta(x) = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n$$

For convenience of notation, define $x_0 = 1$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \in R^{n+1} \quad X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^{n+1} \quad h_\theta = \theta^T X = \begin{bmatrix} \theta_0 & \theta_1 & \ldots & \theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$h_\theta = \theta^T X = \sum_0^n \theta_n x_n$$

training set: design matrix *X*

رگرسیون چند متغیره

$$h_\theta(x) = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n x_n \qquad h_\theta = \theta^T X = \sum_0^n \theta_n x_n$$

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\sum_1^j (h_\theta(x^{(j)}) - y^{(j)})^2$$

تابع هزینه بایستی حداقل شود

مشتق گیری (در این درس مورد نیاز نیست)

$$\begin{aligned}
\nabla_\theta J(\theta) &= \nabla_\theta \frac{1}{2}(X\theta - \vec{y})^T(X\theta - \vec{y}) \\
&= \frac{1}{2}\nabla_\theta \left(\theta^T X^T X\theta - \theta^T X^T \vec{y} - \vec{y}^T X\theta + \vec{y}^T\vec{y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla_\theta \operatorname{tr}\left(\theta^T X^T X\theta - \theta^T X^T \vec{y} - \vec{y}^T X\theta + \vec{y}^T\vec{y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\nabla_\theta \left(\operatorname{tr}\theta^T X^T X\theta - 2\operatorname{tr}\vec{y}^T X\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(X^T X\theta + X^T X\theta - 2X^T\vec{y}\right) \\
&= X^T X\theta - X^T\vec{y}
\end{aligned}$$

$$Ax = b \rightarrow A^T Ax = A^T b \Rightarrow x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

$$X^T X\theta = X^T y$$

مشتق برابر صفر

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

معادله نرمال — تعیین ضرایب رگرسیون

رگرسیون چند متغیره

Hypothesis: $h_\theta(x) = \theta^T x = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$

$x_0 = 1$

Parameters: $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$

Cost function:

$$J(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Gradient descent:

Repeat $\{ \quad \theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \ldots, \theta_n)$

$\}$

(simultaneously update for every $j = 0, \ldots, n$)

رگرسیون چند متغیره

Gradient Descent

Previously (n=1):

Repeat {

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \underbrace{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})}_{\frac{\partial}{\partial\theta_0}J(\theta)}$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x^{(i)}$$

(simultaneously update θ_0, θ_1)

}

New algorithm $(n \geq 1)$:

Repeat {

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x_j^{(i)}$$

(simultaneously update θ_j for $j = 0, \ldots, n$)

}

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x_0^{(i)}$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x_1^{(i)}$$

$$\theta_2 := \theta_2 - \alpha \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x_2^{(i)}$$

$\ldots$

مقیاس کردن متغیرها

Feature Scaling

Idea: Make sure features are on a similar scale.

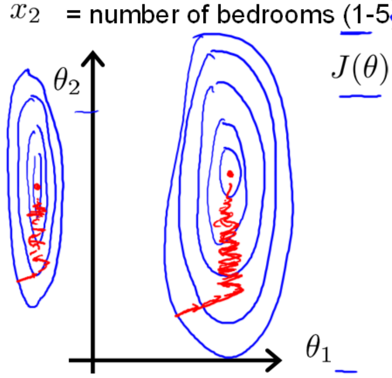
E.g. x_1 = size (0-300 m^2)

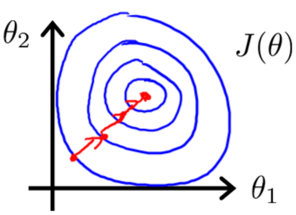
x_2 = number of bedrooms (1-5)

$\to x_1$= size (m^2)/300

$\to x_2 = \frac{\text{number of bedrooms}}{5}$

$0 \leq x_1 \leq 1 \qquad 0 \leq x_2 \leq 1$





Get every feature into approximately a $-1 \leq x_i \leq 1$ range.

Mean normalization

Replace x_i with $x_i - \mu_i$ to make features have approximately zero mean (Do not apply to $x_0 = 1$).

E.g. x_1= (size-150)/300

Ave(x_i)=150

max x_i - *min* x_i=300

x_2= (# bedrooms - 2)/4

$$-0.5 \leq x_1 \leq 0.5, -0.5 \leq x_2 \leq 0.5$$

x_i = (x_i–Ave(x_i))/(max x_i - *min* x_i)

نرخ یادگیری

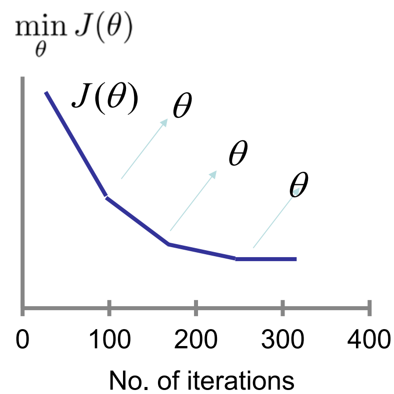
Gradient descent

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta)$$

- "Debugging": How to make sure gradient descent is working correctly.
- How to choose learning rate α .

رگرسیون چند متغیره

Making sure gradient descent is working correctly.



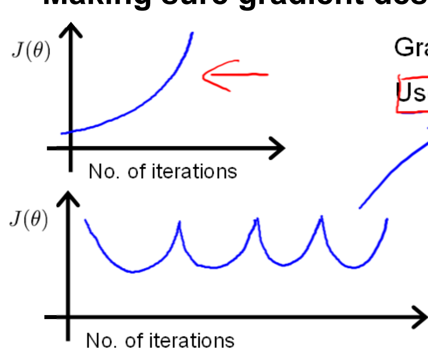
Example automatic convergence test:

Declare convergence if $J(\theta)$ decreases by less than 10^{-3} in one iteration.

تابع هزینه پس از هر تکرار بایستی کاهش یابد

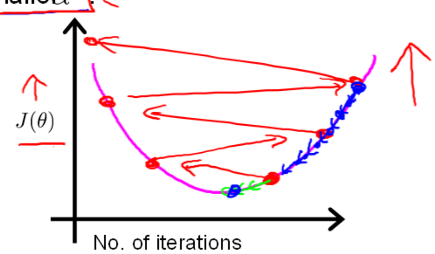
رگرسیون چند متغیره

Making sure gradient descent is working correctly.



Gradient descent not working.

$\boxed{\text{Use smaller } \alpha}$.



- For sufficiently small α, $J(\theta)$ should decrease on every iteration.
- But if α is too small, gradient descent can be slow to converge.

رگرسیون چند متغیره

Summary:

- If α is too small: slow convergence.
- If α is too large: $J(\theta)$ may not decrease on every iteration; may not converge.

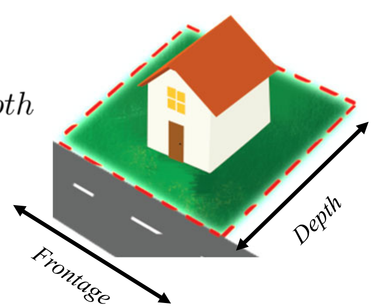
To choose α , try

$$\ldots, 0.001, \; 0.003 \;, 0.01, \; 0.03 \;, 0.1, \; 0.3 \;, 1, \ldots$$

رگرسیون چند متغیره

Housing prices prediction

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 \times frontage + \theta_2 \times depth$$



*Area=Frontage * Depth*

گاهی اوقات یک متغیر ممکن است به چند متغیر
تبدیل شود و جواب بهتری از رگرسیون بدست آید

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

Size (m²) x_1	Number of bedrooms x_2	Number of floors x_3	Age of home (years) x_4	Price (Milliard Toman) y
210.4	5	1	45	46
141.6	3	2	40	23.2
153.4	3	2	30	31.5
85.2	2	1	36	17.8
300	4	1	38	54
289	5	3	20	60
…	…	…	…	…

$$X = \begin{bmatrix} 210.4 & 5 & 1 & 45 \\ 141.6 & 3 & 2 & 40 \\ 153.4 & 3 & 2 & 30 \\ 85.2 & 2 & 1 & 36 \\ 300 & 4 & 1 & 38 \\ 280 & 5 & 3 & 20 \end{bmatrix} \qquad \theta = (X^T X)^{-1} X^T y \qquad y = \begin{bmatrix} 46 \\ 23.2 \\ 31.5 \\ 17.8 \\ 54 \\ 60 \end{bmatrix}$$

معادله نرمال

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

Examples: $m = 5.$

x_0	Size (m²) x_1	Number of bedrooms x_2	Number of floors x_3	Age of home (years) x_4	Price (Milliard Toman) y
1	210.4	5	1	45	46
1	141.6	3	2	40	23.2
1	153.4	3	2	30	31.5
1	85.2	2	1	36	17.8
1	300	4	1	38	54
1	289	5	3	20	60
…	…	…	…	…	…

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 210.4 & 5 & 1 & 45 \\ 1 & 141.6 & 3 & 2 & 40 \\ 1 & 153.4 & 3 & 2 & 30 \\ 1 & 85.2 & 2 & 1 & 36 \\ 1 & 300 & 4 & 1 & 38 \\ 1 & 280 & 5 & 3 & 20 \end{bmatrix} \qquad \theta = (X^T X)^{-1} X^T y \qquad y = \begin{bmatrix} 46 \\ 23.2 \\ 31.5 \\ 17.8 \\ 54 \\ 60 \end{bmatrix}$$

معادله نرمال

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

X

```
X = np.array([
    [1, 210.4, 5, 1, 45],
    [1, 141.6, 3, 2, 40],
    [1, 153.4, 3, 2, 30],
    [1, 85.2, 2, 1, 36],
    [1, 300, 4, 1, 38],
    [1, 280, 5, 3, 20]   ])
```

X^T

```
X_transpose = X.T
```

X^T

```
[[  1.    1.    1.    1.    1.    1. ]
 [210.4 141.6 153.4  85.2 300.  280. ]
 [  5.    3.    3.    2.    4.    5. ]
 [  1.    2.    2.    1.    1.    3. ]
 [ 45.   40.   30.   36.   38.   20. ]]
```

$A = X^T X$ نام گذاری

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$(X^T X)^{-1}$ is inverse of matrix $A = X^T X$

```
A = np.dot(X_transpose,X)
```

```
[[6.0000000e+00 1.1706000e+03 2.2000000e+01 1.0000000e+01 2.0900000e+02]
 [1.1706000e+03 2.6350932e+05 4.7074000e+03 2.0256000e+03 3.9801200e+04]
 [2.2000000e+01 4.7074000e+03 8.8000000e+01 3.8000000e+01 7.5900000e+02]
 [1.0000000e+01 2.0256000e+03 3.8000000e+01 2.0000000e+01 3.1900000e+02]
 [2.0900000e+02 3.9801200e+04 7.5900000e+02 3.1900000e+02 7.6650000e+03]]
```

```
if np.linalg.det(A) != 0:        # کنترل دترمینان ماتریس
  inverse_A = np.linalg.inv(A) # محاسبه معکوس ماتریس
  print(inverse_A)
else:      print("ماتریس معکوس‌پذیر نیست" )
```

$(X^T X)^{-1}$

```
[[ 2.52802649e+01 -2.28181124e-02  1.16806707e+00 -4.75589400e+00   -4.88560969e-01]
 [-2.28181124e-02  1.10911772e-04 -6.61431345e-03  4.63626218e-03   5.08266165e-04]
 [ 1.16806707e+00 -6.61431345e-03  5.44889272e-01 -3.82637813e-01  -3.55352772e-02]
 [-4.75589400e+00  4.63626218e-03 -3.82637813e-01  1.17990985e+00   9.43879852e-02]
 [-4.88560969e-01  5.08266165e-04 -3.55352772e-02  9.43879852e-02   1.04032808e-02]]
```

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

```
C = np.dot(inverse_A, X_transpose)
print(C)
```

$$C = (X^T X)^{-1} X^T$$

```
[[-4.21468217e-01 -3.50080537e+00  1.11555059e+00  3.32820698e+00  -2.14111370e-01  6.92627391e-01]
 [-5.04560327e-03  2.64722510e-03 -1.12667765e-03 -3.66321222e-03   7.94854176e-03 -7.60273724e-04]
 [ 5.19136591e-01 -3.20538615e-01 -4.32347418e-02  3.23983133e-02  -3.69648226e-01  1.81886679e-01]
 [-2.66244322e-01  8.88026388e-01 -1.14557031e-03 -5.48282774e-01  -1.28913313e-01  5.65595910e-02]
 [ 3.23746747e-03  8.17108909e-02 -1.63243765e-02 -4.74211521e-02   1.14904274e-02 -3.26932572e-02]]
```

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y = Cy$$

```
y_transpose
=np.array([46,23.2,31.5,17.8,54,60])
y=y_transpose.T
Tetha = np.dot(C,y)
print(Tetha)
```

θ^T

```
[23.77133468  0.11222718  6.61077944 -5.00828888 -0.65481055]
```

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

θ^T

```
[23.77133468  0.11222718  6.61077944 -5.00828888 -0.65481055]
```

Hypothesis: $h_\theta(x) = \theta^T x = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$

مثال: قیمت یک منزل دوطبقه ده ساله با مساحت دویست متر و دارای سه اتاق خواب چقدر است؟

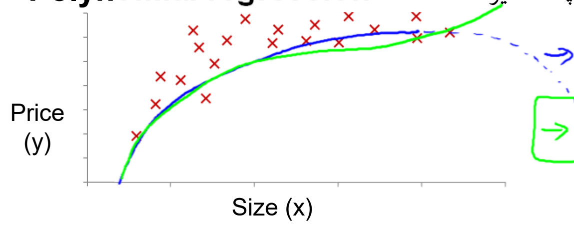
$$h_\theta(x) = \theta^T x \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 200 \\ 3 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow h_\theta(x) = 49.48$$

```
x =np.array([[1],[200],[3],[2],[10]])  # can be writen as below
# x =np.array([1,200,3,2,10])          # just in one dimension
hx = np.dot(Tetha,x)
print("h(x):",hx)
```

رگرسیون با تابع چند جمله ای

Polynomial regression

رگرسیون غیر خطی مشابه رگرسیون چند متغیره است



$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$

$\boxed{\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3}$

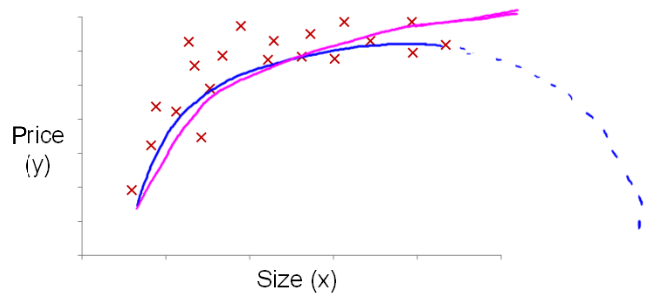
$x_1 = (size)$
$x_2 = (size)^2$
$x_3 = (size)^3$

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3$$
$$= \theta_0 + \theta_1 (size) + \theta_2 (size)^2 + \theta_3 (size)^3$$

Size (m²) $x_1 = 1$	Number of bedrooms $x_2 = x$	Number of floors $x_3 = x^2$	Age of home (years) $x_4 = x^3$	Price (Milliard Toman) y
1	210.4	44268.2	9,314,020.8	46
1	141.6	20,050.6	2,839,159.3	23.2
1	153.4	23,531.6	3,609,741.3	31.5
1	85.2	7,259.0	618,470.2	17.8
1	300	90000	27000000	54
1	289	83,521	24,137,569	60
…	…	…	…	…

رگرسیون غیرخطی

Choice of features



$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 (size) + \theta_2 (size)^2$$

$$\boxed{h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 (size) + \theta_2 \sqrt{(size)}}$$

رگرسیون چند متغیره با تابع چند جمله ای

Polynomial regression

بسط توانی مرتبه n $(x+y+z+\ldots)^n$

معمولا حاصلضرب متغیرها با مجموع توان ۳ نیز در نظر گرفته می شود

تابع جند جمله ای مرتبه ۲ $x,\quad y,\ x^2,\quad y^2,\quad xy$

علاوه بر جملات مرتبه دو معمولا جملات

مرتبه یک در نظر گرفته می شوند

ضرایب یک بسط توانی مرتبه ۳ $(x+y+z+\ldots)^3$

تابع جند جمله ای مرتبه ۳ دو متغیره شامل توانهای مساوی یا کمتر از ۳

$$x,\quad y,\ x^2,\quad y^2,\quad xy,\quad x^3,\quad y^3,\quad x^2y,\quad xy^2$$

محاسبات زیاد تعداد ضرایب در رگرسیون

تعداد ضرایب یک بسط توانی شامل k جمله به توان n $(x+y+z+\ldots)^n$

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,(n)!}$$

برای حالت کودراتیک n=2

$$\binom{2+k-1}{k-1}=\frac{(k+1)!}{(k-1)!(2)!}=k\,(k+1)/2$$

برای مساله قبلی با ۵ متغیر در حالت کودراتیک n=2

$5*6/2$=15

برای مساله قبلی با 1000 متغیر در حالت کودراتیک n=2

$1000*1001/2$=50500

تعداد پارامترهایی که باید حساب شود به سرعت زیاد می شود

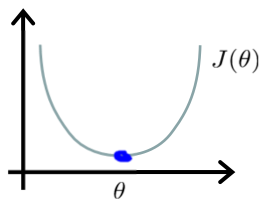
رگرسیون غیرخطی

Intuition: If 1D $(\theta \in \mathbb{R})$

$$J(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$$

$\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) = \dots \stackrel{\text{set}}{=} 0$

Solve for θ



$\theta \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\quad J(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$

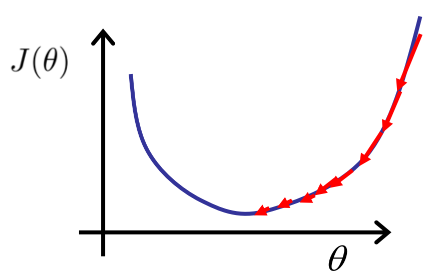
$\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) = \cdots = 0$ (for every j)

Solve for $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$

رگرسیون غیرخطی- معادله نرمال

Gradient Descent

$$h_\theta = \theta^T X = \sum_{0}^{n} \theta_n x_n$$



$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$ معادله نرمال

m **training examples,** n **features.**

Normal Equation

- No need to choose α.
- Don't need to iterate.
- Need to compute $(X^T X)^{-1}$
- Slow if n is very large.

Gradient Descent

- Need to choose α.
- Needs many iterations.
- Works well even when n is large.

دترمینان صفر و عدم وجود معکوس ماتریس

What if $X^T X$ is non-invertible?

- Redundant features (linearly dependent).
  E.g. $x_1 =$ size in m²
  $x_2 =$ size in feet²

- Too many features (e.g. $m \leq n$).
  - Delete some features, or use regularization.

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

Rank of matrix

رتبه ماتریس برابر با کمترین مقدار بین بیشترین تعداد ستون‌ها یا سطرهایی که مستقل از هم هستند.

```
rank_X = np.linalg.matrix_rank(X)
print("Ranx X=", rank_X )
```

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 210.4 & 5 & 1 & 45 \\ 1 & 141.6 & 3 & 2 & 40 \\ 1 & 153.4 & 3 & 2 & 30 \\ 1 & 85.2 & 2 & 1 & 36 \\ 1 & 300 & 4 & 1 & 38 \\ 1 & 280 & 5 & 3 & 20 \end{bmatrix}$$

Ranx x= 5

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 210.4 & 5 & 1 & 45 & 2104 \\ 1 & 141.6 & 3 & 2 & 40 & 1416 \\ 1 & 153.4 & 3 & 2 & 30 & 1534 \\ 1 & 85.2 & 2 & 1 & 36 & 852 \\ 1 & 300 & 4 & 1 & 38 & 3000 \\ 1 & 280 & 5 & 3 & 20 & 2800 \end{bmatrix}$$

Ranx x= 5

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

$(X^T X)^{-1}$ is inverse of matrix $X^T X$

اگر ماتریس دارای دترمینان صفر باشد یا غیر مربعی باشد به جای معکوس از شبه معکوس (pseudo inverse) استفاده می شود. برای اینکار از دستور زیر در برنامه استفاده کنید.

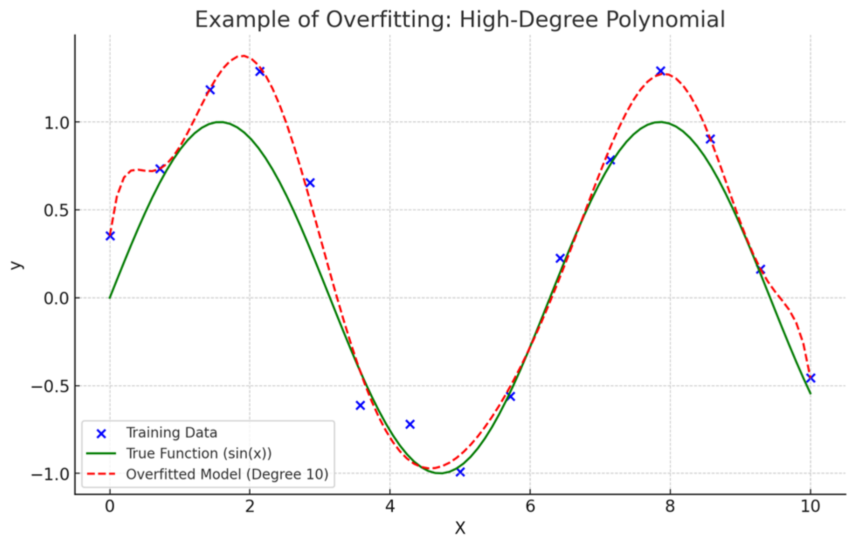
```
import numpy as np
# Assuming a is your rectangular matrix
a = np.array([[...], [...]])  # your matrix
# Compute the pseudo-inverse of a
pseudo_inverse = np.linalg.pinv(a)
```

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \det(X) = 0 \qquad Pseudo\ Inverse\,(X) = \begin{bmatrix} 0.0615 & 0.0308 \\ 0.0923 & 0.0462 \end{bmatrix}$$

رگرسیون چند متغیره- معادله نرمال

- در بسیاری از کاربردهای عملی، مانند پردازش داده‌ها، معمولاً تعداد معادلات بیشتر یا کمتر از تعداد متغیرها است. در این شرایط، شبه‌معکوس یک روش برای یافتن بهترین جواب با حداقل کردن خطای کمترین مربعات است.
- جواب‌هایی که از طریق شبه‌معکوس به دست می‌آیند، دقیقاً مانند حل معادلات با معکوس معمولی نیستند؛ زیرا شبه‌معکوس کمترین خطا را پیدا می‌کند اما نمی‌تواند شرایط دقیق را برآورده کند. در مواردی که داده‌ها نویزی یا دارای خطا هستند، این روش اغلب جواب قابل اعتمادی فراهم می‌کند.
- در مواردی که ماتریس اصلی دارای دترمینان صفر باشد، استفاده از شبه‌معکوس تنها راه حل معادله خواهد بود که یک جواب تقریبی بهینه از نظر کمترین مربعات خطا ارائه می‌دهد.
- در شرایطی که تعداد معادلات کمتر از تعداد متغیرها باشد جواب‌های متعددی ممکن است وجود داشته باشد، و شبه‌معکوس یک جواب خاص از بین جواب‌های ممکن ارائه می‌دهد که بهینه است.

بیش برازش (Overfitting)



بیش برازش (Overfitting)

روش‌های جلوگیری از بیش برازش داده ها

تقسیم داده‌ها به مجموعه‌های آموزشی، ارزیابی و تست
این کار به مدل کمک می‌کند تا روی مجموعه تست عمومی‌سازی (generalization) بهتری داشته باشد. مجموعه ارزیابی برای تنظیم هایپرپارامترها و انتخاب بهترین مدل استفاده می‌شود، و مجموعه تست برای ارزیابی نهایی مدل به کار می‌رود.

۲. استفاده از روش‌های منظم‌سازی (Regularization)
•ا روش‌های منظم سازی ریج و لسو به مدل کمک می‌کنند تا از یادگیری بیش از حد جزئیات و نوسانات نویز جلوگیری کنند. با افزودن جریمه‌ای به تابع هزینه که بزرگی وزن‌ها را کاهش می‌دهد، مدل ساده‌تر می‌شود.

۳. کاهش تعداد ویژگی‌ها (Feature Selection)
•در داده‌های حجیم، معمولاً تعداد زدیادی ویژگی وجود دار. با استفاده از روش‌های کاهش ویژگی‌ها، مدل با ویژگی‌های غیرضروری دچار بیش‌برازش نمی شود.

•روشهای دیگری نیز وجود دارد که در صورت نیاز می توانید در باره آنها تحقیق نمایید

نمونه رگرسیون مرتبه دو

روش معادله نرمال

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.metrics import root_mean_squared_error, r2_score
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Load the data
file_path = '3D_data.xlsx'
data = pd.read_excel(file_path)

# Extract X, Y, Z columns
X_data = data[['X', 'Y']]
Z_data = data['Z']

# Create polynomial features of degree 2
poly = PolynomialFeatures(degree=2)
X_poly = poly.fit_transform(X_data)

# Fit a linear regression model on the polynomial features
model = LinearRegression()
model.fit(X_poly, Z_data)

# Predict Z values using the model
Z_pred = model.predict(X_poly)

# Get coefficients for the polynomial equation
intercept = model.intercept_
coefficients = model.coef_
```

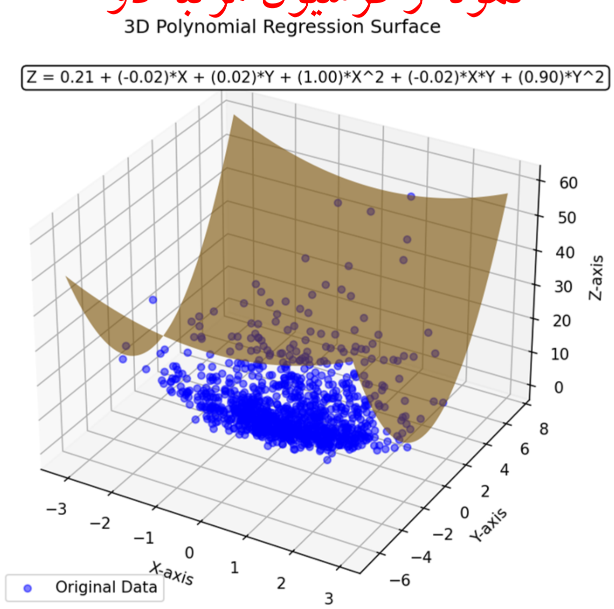

نمونه رگرسیون مرتبه دو

```
# Format the polynomial equation as a string
equation = (f"Z = {intercept:.2f} "
            f"+ ({coefficients[1]:.2f})*X "
            f"+ ({coefficients[2]:.2f})*Y "
            f"+ ({coefficients[3]:.2f})*X^2 "
            f"+ ({coefficients[4]:.2f})*X*Y "
            f"+ ({coefficients[5]:.2f})*Y^2")

# Create a mesh grid for X and Y for a smooth surface plot
x_range = np.linspace(X_data['X'].min(), X_data['X'].max(), 100)
y_range = np.linspace(X_data['Y'].min(), X_data['Y'].max(), 100)
x_mesh, y_mesh = np.meshgrid(x_range, y_range)

# Transform mesh grid data for prediction
X_mesh_poly = poly.transform(np.c_[x_mesh.ravel(),
y_mesh.ravel()])
z_mesh_pred = model.predict(X_mesh_poly).reshape(x_mesh.shape)
```

نمونه رگرسیون مرتبه دو

```python
# Plotting the 3D scatter and regression surface
fig = plt.figure(figsize=(12, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
# Plot the original data points
ax.scatter(X_data['X'], X_data['Y'], Z_data, color='blue',
label="Original Data", alpha=0.5)
# Plot the regression surface
ax.plot_surface(x_mesh, y_mesh, z_mesh_pred, color='orange',
alpha=0.6, rstride=100, cstride=100)
# Add the polynomial equation to the plot
ax.text2D(0.05, 0.95, equation, transform=ax.transAxes,
fontsize=10, verticalalignment='top',
bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3", edgecolor="black",
facecolor="white"))
# Labels and title
ax.set_title("3D Polynomial Regression Surface")
ax.set_xlabel("X-axis")
ax.set_ylabel("Y-axis")
ax.set_zlabel("Z-axis")
plt.legend()
plt.show()
```


نمونه رگرسیون مرتبه دو



نمونه رگرسیون مرتبه دو – نزول گرادیان

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Load the data
file_path = '3D_data.xlsx'
data = pd.read_excel(file_path)

# Extract X, Y, Z columns
X_data = data[['X', 'Y']].values
Z_data = data['Z'].values

# Generate polynomial features of degree 2 manually
X_poly = np.c_[np.ones(X_data.shape[0]), X_data[:, 0],
X_data[:, 1], X_data[:, 0]**2, X_data[:, 0]*X_data[:, 1],
X_data[:, 1]**2]

# Initialize parameters for gradient descent
theta = np.random.randn(X_poly.shape[1])
learning_rate = 0.01
num_iterations = 10000

# Define the cost function
def compute_cost(X, y, theta):
    m = len(y)
    predictions = X @ theta
    cost = (1 / (2 * m)) * np.sum((predictions - y) ** 2)
    return cost
```

Artificial Intelligence 39

نمونه رگرسیون مرتبه دو – نزول گرادیان

```
# Define the gradient descent function
def gradient_descent(X, y, theta, learning_rate,
num_iterations):
    m = len(y)
    cost_history = []

    for i in range(num_iterations):
        # Calculate predictions
        predictions = X @ theta

        # Calculate the gradients
        gradients = (1 / m) * X.T @ (predictions - y)

        # Update the parameters
        theta -= learning_rate * gradients

        # Store the cost for this iteration
        cost = compute_cost(X, y, theta)
        cost_history.append(cost)

        # Optional: print cost every 1000 iterations for
monitoring
        if i % 1000 == 0:
            print(f"Iteration {i}: Cost = {cost}")

    return theta, cost_history
```

Artificial Intelligence 40

نمونه رگرسیون مرتبه دو – نزول گرادیان

```
# Run gradient descent
theta, cost_history = gradient_descent(X_poly, Z_data,
theta, learning_rate, num_iterations)

# Display final parameters
intercept = theta[0]
equation = (f"Z = {intercept:.2f} "
            f"+ ({theta[1]:.2f})*X "
            f"+ ({theta[2]:.2f})*Y "
            f"+ ({theta[3]:.2f})*X^2 "
            f"+ ({theta[4]:.2f})*X*Y "
            f"+ ({theta[5]:.2f})*Y^2")
print("Equation:", equation)
# Plotting the 3D scatter and regression surface
fig = plt.figure(figsize=(12, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
# Original data points
ax.scatter(X_data[:, 0], X_data[:, 1], Z_data, color='blue',
label="Original Data", alpha=0.5)
```

Artificial Intelligence 41

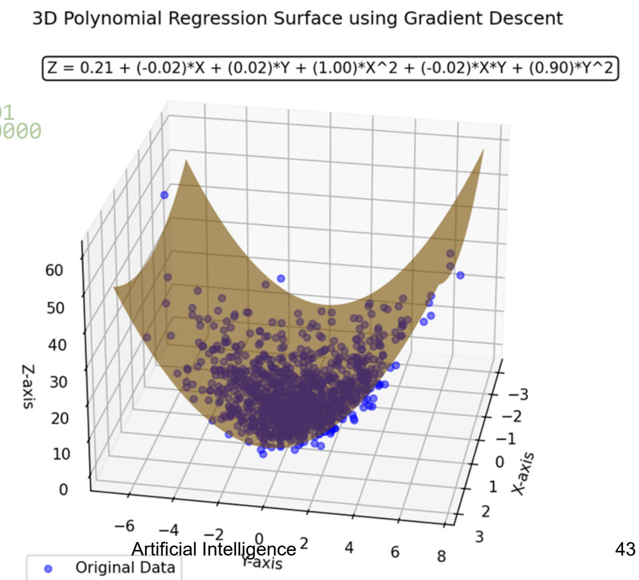
نمونه رگرسیون مرتبه دو – نزول گرادیان

```
# Create mesh grid for X and Y for the regression surface
x_range = np.linspace(X_data[:, 0].min(), X_data[:, 0].max(), 100)
y_range = np.linspace(X_data[:, 1].min(), X_data[:, 1].max(), 100)
x_mesh, y_mesh = np.meshgrid(x_range, y_range)
X_mesh_poly = np.c_[np.ones(x_mesh.ravel().shape[0]), x_mesh.ravel(),
y_mesh.ravel(), x_mesh.ravel()**2, x_mesh.ravel()*y_mesh.ravel(),
y_mesh.ravel()**2]

# Predict Z values for the grid
z_mesh_pred = X_mesh_poly @ theta
z_mesh_pred = z_mesh_pred.reshape(x_mesh.shape)

# Plot the regression surface
ax.plot_surface(x_mesh, y_mesh, z_mesh_pred, color='orange',
alpha=0.6, rstride=100, cstride=100)

# Add the polynomial equation to the plot
ax.text2D(0.05, 0.95, equation, transform=ax.transAxes, fontsize=10,
verticalalignment='top', bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3",
edgecolor="black", facecolor="white"))

# Labels and title
ax.set_title("3D Polynomial Regression Surface using Gradient
Descent")
ax.set_xlabel("X-axis")
ax.set_ylabel("Y-axis")
ax.set_zlabel("Z-axis")
plt.legend()
plt.show()
```

Artificial Intelligence 42

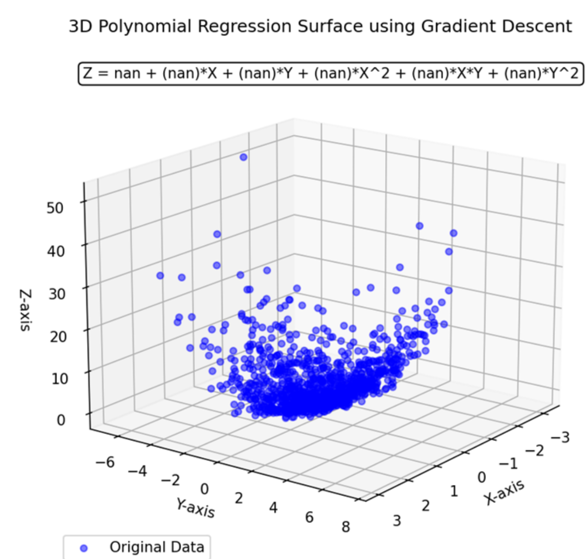
نمونه رگرسیون مرتبه دو – نزول گرادیان

```
learning_rate = 0.01
num_iterations = 10000
```



نمونه رگرسیون مرتبه دو – نزول گرادیان

```
learning_rate = 0.1
num_iterations = 10000
```



تمرین برنامه نویسی

تمرین ششم : یک برنامه به زبان پایتون بنویسید که یک فایل داده را خوانده و رگرسیون درجه ۲ برای دو متغیر حساب نماید.

۱- به روش معادله نرمال

۲- با استفاده از نزول در راستای گرادیان

۳- مقایسه زمان دو روش حل فوق