ریاضیات عالی مهندسی

Advanced Engineering Mathematics

Hasan Ghasemzadeh

http://wp.kntu.ac.ir/ghasemzadeh/indexfa.html

قول الحق

وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا

جن 28

الشَّمْسُ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ

رحمان 5

منابع

1. ریاضیات مهندسی پیشرفته تالیف حسن قاسم زاده

2.Advanced Engineering Mathematics Erwin Kreyszig

3.Advanced Engineering Mathematics Ray Wyliy & Louise C. Barrett عبدالله شیدفر

4.Applicable Mathematics Fred A. Hinchey بابک کاظمی

5.Methods of Applied Mathematics Hilde Brand

6.Partial Differential Equations of Mathematical physics Tyn Myint-U

7.PDE for Scientists & Engineering Farlow عالم زاده

8- جزوه کلاس

ارزیابی

۱- امتحان پایانترم	۵۰
۲- امتحان میانترم	۴۰
۳- تمرینات و فعالیت های کلا سی	۱۰
۴- غیبت	-۱۰

فهرست عناوین و فصول

1. یاد آوری
2. سری فوریه و انتگرال فوریه
3. معادلات دیفرانسیل جزئی
4. توابع مختلط
5. حساب تغییرات

یادآوری

1. یاد آوری و جبر تانسوری

اسکالر: کمیتی که تنها دارای *اندازه* است.
کمیت‌هایی نظیر جرم، طول، زمان و دما اسکالر می‌باشند.

بردار: کمیتی که دارای *اندازه* و *جهت* است.
کمیت‌هایی مانند جابجایی، سرعت، شتاب و نیرو دارای اندازه و جهت هستند

اگر بردار $\vec{A}$ را تقسیم بر اندازه آن $\left|\vec{A}\right|$ کنیم،
بردار واحد با اندازه یک $\vec{n}$ بدست خواهد آمد

$$\vec{n}=\frac{1}{\left|\vec{A}\right|}\vec{A}$$

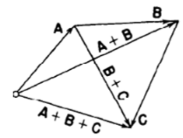
یک بردار n بعدی، رابطه‌ای یک به یک بین n عدد و یک نقطه را بیان می‌کند.
توسعه: اختصاص دادن n عدد مربع به یک نقطه یا n عدد مکعب به یک نقطه: میدان‌های تانسوری با قوانین انتقال مشخصی
میدان‌های اسکالر را میدان‌های تانسور مرتبه صفر و میدان‌های برداری را میدان تانسور مرتبه یک نامند.

یاد آوری

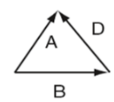
خواص بردارها

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$



$$\vec{B}+\vec{D}=\vec{A} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$$



$$m\vec{A}=\vec{A}m$$

$$m(n\vec{A})=(mn)\vec{A}$$

$$m(\vec{A}+\vec{B})=m\vec{A}+m\vec{B}$$

$$(m+n)\vec{A}=m\vec{A}+n\vec{A}$$

m, n اسکالر

یاد آوری و جبر تانسوری

حاصلضرب داخلی:

$$\vec{A}.\vec{B}=\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|\cos\theta, \qquad 0\le\theta\le\pi$$

اگر حاصلضرب داخلی دو بردار صفر باشد، دو بردار متعامد هستند

$$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$$

$$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$$

بردارهای واحد در جهت محورهای مختصات

$$\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1, \qquad \vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=0$$

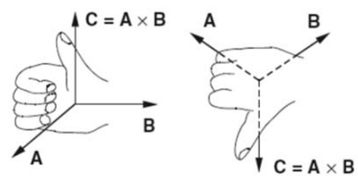
یاد آوری و جبر تانسوری

حاصلضرب خارجی:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta \, \vec{n}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$



$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2B_3 - A_3B_2)\vec{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\vec{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{k}$$

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_1 & B_1 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

یاد آوری و جبر تانسوری

نمایش اندیسی

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3, \quad \vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3$$

$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ بردارهای واحد و عمود بر هم

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad \vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$$

$$\hat{e}_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad \hat{e}_2 = (0,\ 1,\ 0), \quad \hat{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)$$

نمایش مختصر و کوتاه به کمک اندیس‌ها

$$A_i, \quad i = 1,\ 2,3 \qquad B_p, \quad p = 1,\ 2,\ 3$$

بردار با ابعاد بالاتر

$$\vec{X} = (X_1, X_1, \ldots, X_N) \quad \to \vec{X} = X_1\hat{e}_1 + X_2\hat{e}_2 + \ldots + X_3\hat{e}_n$$

$$\to X_i, \quad i = 1,\ 2, \ldots, N$$

یاد آوری و جبر تانسوری

سامانه‌های تانسوری

A_{ij}^{k} e^{ijk} δ_{ij} δ_{i}^{j} A^{i} B_{j} a_{ij}

کمیت‌هایی که از قوانین انتقال مشخصی پیروی می‌کنند، سامانه‌های تانسوری نامیده می‌شوند.

زیرنویس‌ها یا بالانویس‌ها (اندیس یا پسوند) از قوانین زیر پیروی می کنند

۱. حروف کوچک لاتین یا یونانی باشند.
۲. حروف انتهایی الفبا نظیر u و v،w،x،y و z هیچگاه بعنوان اندیس استفاده نشوند.

تعداد اندیس‌ها مشخص‌کننده مرتبه سامانه یا سیستم است

A_{jk}^{i} سامانه مرتبه ۳

Dr. Hasan Ghasemzadeh 11

یاد آوری و جبر تانسوری

اگر در یک عبارت، اندیس‌ها غیرتکراری باشند، بالانویس‌ها یا زیرنویس‌ها هرکدام از اعداد صحیح $N,\ldots,2,1$ را می‌تواند اختیار کند. بعنوان مثال تابع کرونکر دلتا

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \delta_{11} = 1 & \delta_{21} = 0 & \delta_{31} = 0 \\ \delta_{12} = 0 & \delta_{22} = 1 & \delta_{32} = 0 \\ \delta_{13} = 0 & \delta_{23} = 0 & \delta_{33} = 1 \end{array}$$

اندیس آزاد : اندیس غیرتکراری

$$e_m e_n = \delta_{mn}, \qquad m,n = 1,2,3$$

$$\begin{array}{lll} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1, & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0, & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = 0 \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 = 0, & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = 1, & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0 \\ \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0, & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 = 0, & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1 \end{array}$$

اندیس تکرار: یک اندیس در یک جمله دو بار تکرار شود

Dr. Hasan Ghasemzadeh 12

یاد آوری و جبر تانسوری

سامانه‌های متقارن و پادمتقارن Skew-Symmetric

سامانه متقارن: جای دو اندیس عوض شود سامانه تغییر نمی کند

$$T_{ijk} = T_{kji}$$

سامانه پادمتقارن: جای دو اندیس ها عوض شود سامانه قرینه می شود

$$T_{ijkl} = -T_{ljki}$$

مثال: سامانه مرتبه سه پادمتقارن روی تمام اندیس‌ها $a_{prs}, p,r,s = 1,2,3$

$$a_{prs} = -a_{psr} = -a_{spr} = -a_{srp} = a_{rsp} = -a_{rps}$$

قرارداد جمع بروی اندیس‌ها

در صورت وجود اندیس تکرار عمل جمع با توجه به محدوده مقادیر روی اندیس تکرار صورت می‌گیرد.

توجه: اندیس تکرار اجازه ندارد بیش از دو بار در یک جمله بکار رود.

$$y = x_{ii}, \quad i = 1,2,3 \rightarrow y = x_{11} + x_{22} + x_{33}$$

$$y_k = a_{ki}x_i, \quad i,k = 1,2 \rightarrow \begin{matrix} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{matrix}$$

یاد آوری و جبر تانسوری

جمع، ضرب و انقباض

اعمال جبری جمع و تفریق برای یک سیستم از یک نوع ومرتبه امکان‌پذیر است

$$C^i_{jk} = A^i_{jk} + B^i_{jk}$$

حاصلضرب دو سامانه از ضرب هر مولفه سامانه اول با هر مولفه از سامانه دوم بدست می‌آید

$$C^{imnl}_j = A^i_j B^{mnl}$$ سامانه مرتبه ۵

عمل انقباض هنگامی رخ می‌دهد که اندیس‌بالایی با پایینی برابر باشد و عمل جمع روی اندیس انجام شود.

$$C^{mnl} = C^{jmnl}_j = C^{1mnl}_1 + C^{2mnl}_2 + \dots + C^{Nmnl}_N$$

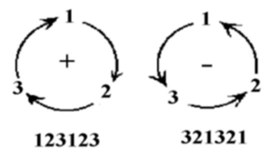
یاد آوری و جبر تانسوری

نماد جایگشتی

نماد جایگشتی یا چرخشی اغلب در هنگام نمایش اندیسی از آن استفاده می‌شود

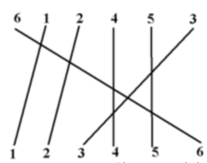
$$e^{ijkl} = e_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad ijk\ldots l \quad \text{is an even permutation of the integers } 123\ldots n \\ -1 & \text{if} \quad ijk\ldots l \quad \text{is an odd permutation of the integers } 123\ldots n \\ 0 & \text{in all other cases} \end{cases}$$

1 2 3	جایگشت زوج
1 3 2	جایگشت فرد
3 1 2	جایگشت زوج
3 2 1	جایگشت فرد
2 3 1	جایگشت زوج
2 1 3	جایگشت فرد



می‌باشند که بیان

$$e_{612453} = ?$$



از اتصال عددهای یکسان هفت تقاطع یعنی به تعداد فرد جابجایی لازم است

$$e_{612453} = -1$$

یاد آوری و جبر تانسوری

دترمینان ماتریس

$$|A| = e_{ij\ldots k}\, a_{1i}\, a_{2j} \ldots a_{Nk}$$

$$|A| = e_{ij}\, a_{1i}\, a_{2j}$$

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = e_{ijk}\, a_{i1} a_{j2} a_{k3} = e_{ijk}\, a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

یاد آوری و جبر تانسوری

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = e_{ijk} A_j B_k \hat{e}_i \qquad A_p, B_p \quad p = 1,2,3$$ **حاصلضرب خارجی**

$$C_i = e_{ijk} A_j B_k , \qquad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3$$

$$C_i = e_{ij1} A_j B_1 + e_{ij2} A_j B_2 + e_{ij} 3 A_j B_3$$

$$\begin{aligned} C_i = &e_{i11} A_1 B_1 + e_{i21} A_2 B_1 + e_{i31} A_3 B_1 \\ &+ e_{i12} A_1 B_2 + e_{i22} A_2 B_2 + e_{i32} A_3 B_2 \\ &+ e_{i13} A_1 B_3 + e_{i23} A_2 B_3 + e_{i33} A_3 B_3 \end{aligned}$$

$$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$
$$C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$$
$$C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 17

یاد آوری و جبر تانسوری

حساب مشتق‌ها

$\phi = \phi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ یک تابع اسکالر از متغیرهای $\bar{x}^i$ که خود تابعی از x^i هستند $i = 1, \ldots, N$

مشتق زنجیری

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^i} + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^N} \frac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^m} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \partial x^m} + \frac{\partial}{\partial x^m} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^j} \right] \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}$$

مشتق : زیرنویس کاما دار

$$\phi_{,ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^k}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 18

یاد آوری و جبر تانسوری

اتحادهای برداری در دستگاه کارتزین

گرادیان (شیب)

$$\nabla\phi = \phi_{,i}\hat{e}_i$$

$$\nabla\phi = grad\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_3$$

مشتق : زیرنویس کاما دار

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^j} = \phi_{,j} = e_j.grad\phi, \qquad j = 1,2,3$$

گرادیان هر تانسور را یک مرتبه افزایش مرتبه می‌دهد برای مثال گردایان کمیت نرده‌ای کمیت برداری است

Dr. Hasan Ghasemzadeh 19

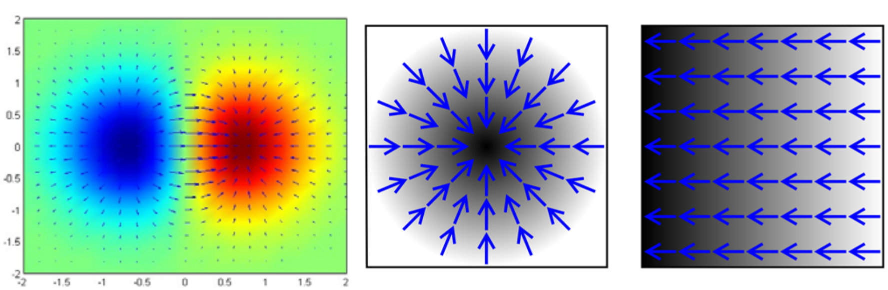
یاد آوری و جبر تانسوری

اتحادهای برداری در دستگاه کارتزین

گرادیان (شیب)

$$\nabla\phi = \phi_{,i}\hat{e}_i$$

$$\nabla\phi = grad\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_3$$



$\nabla\phi$ بیشینه نرخ تغییرات فضایی میدان ϕ است و همواره بر سطح $\phi = cte$ عمود است

Dr. Hasan Ghasemzadeh 20

یاد آوری و جبر تانسوری

اتحادهای برداری در دستگاه کارتزین

دیورژانس (واگرایی)

$$\nabla.\vec{A} = div\vec{A} = A_{i,i}$$

$$\nabla.\vec{A} = div\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$A_{i,i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3}$$

دیورژانس هر تانسور را یک مرتبه کاهش مرتبه می‌دهد برای مثال گردایان کمیت برداری کمیت نرده‌ای است

دیورژانس نشان‌دهنده چگالی حجمی شار خروجی از (یا ورودی به) یک حجم بسیار کوچک می‌باشد.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 21

یاد آوری و جبر تانسوری

دیورژانس (واگرایی)

$$\nabla.\vec{A} = div\vec{A} = A_{i,i}$$

میدان برداری سرعت قطرات آب یک فواره در محلی که آب از آن بیرون می‌زند واگرایی و پخش شدگی زیادی دارد پس دیورژانس مقدار زیاد مثبت دارد.
در حالیکه میدان برداری سرعت آبی که در یک کانال مستقیم حرکت می‌کند هیچ واگرایی و پخش شدگی ندارد، بنابراین دیورژانس آن صفر است

Quantity of a vector field's source at each point

Dr. Hasan Ghasemzadeh 22

یاد آوری و جبر تانسوری

کرل

$$\vec{B} = curl\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

$$B_i = \hat{e}_i .curl\ \vec{A} = e_{ijk} A_{k,j}, \qquad i, j, k = 1,2,3$$

$$B_i = e_{i12}A_{2,1} + e_{i13}A_{3,1} + e_{i21}A_{1,2} + e_{i23}A_{3,2} + e_{i31}A_{1,3} + e_{i32}A_{2,3}$$

$$i = 1, \quad B_1 = A_{3,2} - A_{2,3} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}$$

$$i = 2, \quad B_2 = A_{1,3} - A_{3,1} = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}$$

$$i = 3, \quad B_3 = A_{2,1} - A_{1,2} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}$$

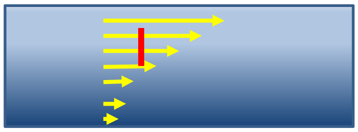
Dr. Hasan Ghasemzadeh 23

یاد آوری و جبر تانسوری

کرل

$$\vec{B} = curl\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

$$B_i = \hat{e}_i .curl\ \vec{A} = e_{ijk} A_{k,j}, \qquad i, j, k = 1,2,3$$



Infinitesimal rotation of a vector field in three-dimensional Euclidean space

Dr. Hasan Ghasemzadeh 24

یاد آوری و جبر تانسوری

عمگرهای ترکیبی

$$(\vec{B}.\nabla)\vec{A}$$

$$\{(\vec{B}.\nabla)\vec{A}\}.\hat{e}_p = A_{p,q}B_q, \qquad p,q = 1,2,3$$

$$(\vec{B}.\nabla)\phi$$

$$(\vec{B}.\nabla)\phi = B_i\phi_{,i} = B_1\phi_{,1} + B_2\phi_{,2} + B_3\phi_{,3}$$

$$= B_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + B_3\frac{\partial\phi}{\partial x_3}$$

$$(\vec{B}\times\nabla).\vec{A}$$

$$(\vec{B}\times\nabla).\vec{A} = e_{ijk}B_j\phi_{i,k}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 25

یاد آوری و جبر تانسوری

مثال. خاصیت زیر را در دستگاه مختصات کارتزین اثبات کنید.

$$curl\ (f\vec{A}) = \nabla\times(f\vec{A}) = (\nabla f)\times\vec{A} + f\,(\nabla\times\vec{A})$$

$$B = curl\ (f\vec{A})$$

$$B_i = e_{ijk}(f\ A_k)_{,j}$$
$$= e_{ijk}\ [f\ A_{k,j} + f_{,j}A_k]$$
$$= f\ e_{ijk}A_{k,j} + e_{ijk}f_{,j}A_k$$

$$B = curl\ (f\vec{A}) = f\ (\nabla\times\vec{A}) + (\nabla f)\times\vec{A}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 26

یاد آوری و جبر تانسوری

تئوری انتگرال‌گیری دیورژانس

$$\iiint_V \nabla.\vec{F}dv = \iint_S \vec{F}.\hat{n}\,ds$$

$$\int_V F_{i,i}dv = \int_S F_i n_i ds \qquad i = 1,2,3$$

قضیه استوکس

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}).\vec{n}ds = \oint_C \vec{F}.d\vec{r}$$

$$\int_S e_{ijk} F_{k,j} n_i ds = \oint_C F_i dx^i \qquad i,j,k = 1,2,3$$

قضیه گرین در سطح

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\oint_C F_i dx^i = \int_S \hat{e}_{3jk} F_{k,j} dS \qquad i,j,k = 1,2$$

یاد آوری و جبر تانسوری