ریاضیات عالی مهندسی

Advanced Engineering Mathematics

Hasan Ghasemzadeh

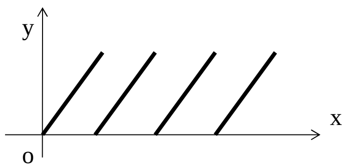
http://sahand.kntu.ac.ir/~ghasemzadeh/indexfa.html

فهرست عناوین و فصول

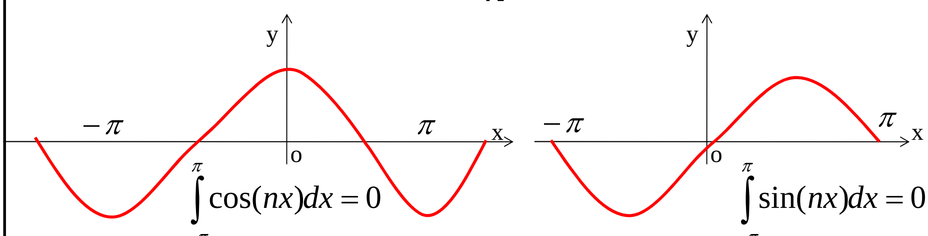
فهرست عناوین و فصول

توابع متناوب- یادآوری

$$f(x+T)=f(x)$$
$$f(x+nT)=f(x)$$



$$f(x)=\sin(nx)$$
$$f(x)=\cos(nx)$$
$$T=\frac{2\pi}{n}$$



$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx=0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx=0$$

توابع متناوب را می توان بر حسب سری مثلثاتی نوشت؟

سری فوریه توابع متناوب

سری مثلثاتی فوریه برای تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

ضرایب؟

انتگرال گیری از طرفین

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + a_n \sum \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx}_{0} + b_n \sum \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx}_{0} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

طرفین ضربدر $\cos(mx)$ وانتگرال گیری

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx}_{0} + \sum_n a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx + \sum_n b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx$$

$$= \sum_n \frac{a_n}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n+m)x)dx}_{0} + \sum_n \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n-m)x)dx + \sum_n \frac{b_n}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin((n+m)xdx}_{0} + \sum_n \frac{b_n}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin((n-m)xdx}_{0}$$

$$n = m \Rightarrow a_n\pi$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 5

سری فوریه توابع متناوب

سری مثلثاتی فوریه برای تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 6

سری فوریه توابع متناوب

سری فوریه برای تابع $f(x)$ با دوره تناوب $T = 2L$

تغییر متغییر $x \to \frac{\pi}{L} x$

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L} x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 7

سری فوریه توابع متناوب

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L} x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

اگرتابع $f(x)$ فرد باشد

$T = 2L$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)$$

$$a_0 = a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

اگرتابع $f(x)$ زوج باشد

$T = 2L$

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L} x)$$

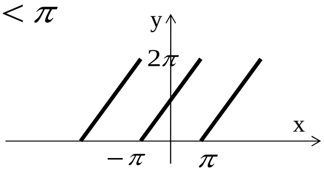
$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \qquad b_n = 0$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 8

سری فوریه

مثال

$$\begin{cases} f(x) = x + \pi & -\pi \le x < \pi \\ f(x + 2\pi) = f(x) \end{cases}$$



$$f(x) = f_1 + f_2 \qquad \begin{cases} f_1 = x & \text{تابع فرد} \\ f_2 = \pi & \text{تابع ثابت} \end{cases} \qquad T = 2\pi$$

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{-x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\left|\int_0^{\pi}\cos nx dx\right.\right] = \frac{-2}{n}\cos n\pi$$

$$b_1 = 2, b_2 = -\frac{2}{2}, b_3 = \frac{2}{3}, b_4 = -\frac{2}{4}$$

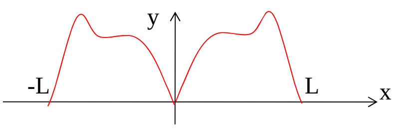
$$f(x) = f_1 + f_2 = \pi + 2(\sin x - 1/2\sin 2x + 1/3\sin 3x + \ldots)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 9

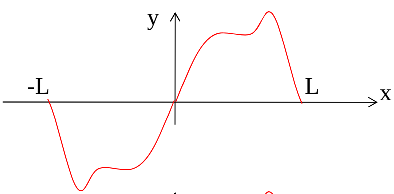
سری فوریه – بسط نیم دامنه

اگر سری مثلثاتی فوریه برای تابع $f(x)$ در بازه $[0, L]$ نیاز باشد

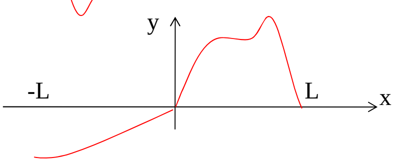
ایجاد تابع متناوب در بازه $[-L, L]$



با قرینه محوری تابع زوج ایجاد می کنیم سپس سری فوریه کسینوسی نوشته می شود



با قرینه مرکزی تابع فرد ایجاد می کنیم سپس سری فوریه سینوسی نوشته می شود



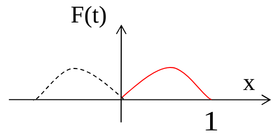
با امتداد تابع یک تابع دلخواه ایجاد می کنیم سپس سری فوریه سینوسی و کسینوسی نوشته می شود

Dr. Hasan Ghasemzadeh 10

سری فوریه

مثال

$$f(t) = t - t^2 \quad 0 \le t \le 1$$



$$0 \le t \le 1 \qquad \Rightarrow T = 2L = 2$$

بسط کسینوسی

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)dt = 2\int_0^1 (t - t^2)dt = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi}{L}tdt = 2\int_0^1 (t - t^2)\cos n\pi t dt = \frac{-2(1+\cos n\pi)}{(n\pi)^2}$$

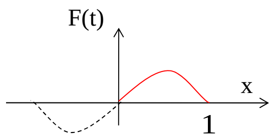
$$f(t) = \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi t}{4} + \frac{\cos 4\pi t}{16} + \frac{\cos 6\pi t}{36} + \dots\right) \qquad 0 \le t \le 1$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 11

سری فوریه

مثال

$$f(t) = t - t^2 \quad 0 \le t \le 1$$



$$0 \le t \le 1 \qquad \Rightarrow T = 2L = 2$$

بسط سینوسی

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\frac{n\pi}{L}tdt = 2\int_0^1 (t - t^2)\sin n\pi t dt = \frac{4(1-\cos n\pi)}{(n\pi)^3}$$

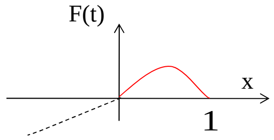
$$f(t) = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\sin \pi t}{1} + \frac{\sin 3\pi t}{27} + \frac{\sin 5\pi t}{125} + \dots\right) \qquad 0 \le t \le 1$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 12

سری فوریه

مثال

$$f(t) = t - t^2 \quad 0 \le t \le 1$$



$$0 \le t \le 1 \qquad \Rightarrow T = 2L = 2$$

بسط

$$f(t) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos\pi t}{1} - \frac{\cos 2\pi t}{4} + \frac{\cos 3\pi t}{9} + \dots\right)$$

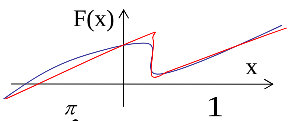
$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\pi t}{1} - \frac{\sin 2\pi t}{2} + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \dots\right) \qquad 0 \le t \le 1$$

خطای مربعی مینیمم

بهترین سری؟

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

فرض بهترین سری



$$F(x) = \alpha_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)$$

میزان خطا

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 dx$$

میزان خطا حداقل

$$E_{\min} = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \pi\left[a_0^2 \;/2 - \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right]$$

نامساوی بسل

$$\left[a_0^2/2 - \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right] \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

تساوی پارسوال

$$\left[a_0^2/2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$$

فرم نمایی سری فوریه

$$f(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi}{L}t)+b_n\sin(\frac{n\pi}{L}t)\qquad -L<t\le L$$

$$f(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\left(\frac{e^{\frac{n\pi}{L}ti}+e^{-\frac{n\pi}{L}ti}}{2}\right)+b_n\left(\frac{e^{\frac{n\pi}{L}ti}-e^{-\frac{n\pi}{L}ti}}{2i}\right)\right\}$$

$$f(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{\frac{n\pi}{L}ti}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-\frac{n\pi}{L}ti}\right\}$$

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{\frac{n\pi}{L}ti}\qquad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}\qquad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

$$c_0=\frac{a_0-ib_0}{2}=\frac{a_0}{2}\qquad a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)dt$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{n\pi}{L}t-i\sin\frac{n\pi}{L}t\right)dt\qquad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)e^{-\frac{n\pi}{L}ti}dt$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 15

انتگرال فوریه

اگر تابع متناوب نباشد؟

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{\frac{n\pi}{L}xi}\qquad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-\frac{n\pi}{L}xi}dx$$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-\frac{n\pi}{L}xi}dx\right]e^{\frac{n\pi}{L}xi}$$

بر اساس فرکانس زاویه ای

$$\omega_n=\frac{n\pi}{L}\qquad \Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{(n+1)\pi}{L}-\frac{n\pi}{L}=\frac{\pi}{L}$$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\omega_nx}dx\right]e^{i\omega_nx}$$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{i\omega_nx}}{2\pi}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\omega_nx}dx\right]\Delta\omega$$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}[F(\omega_n)]\Delta\omega\qquad F(\omega_n)=\frac{e^{i\omega_nx}}{2\pi}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\omega_nx}dx$$

دوره تناوب بی نهایت

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}[F(\omega_n)]\Delta\omega=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega\qquad L\to\infty$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 16

انتگرال فوریه

فرم مختلط انتگرال فوریه

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right]d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega(\tau-x)}d\tau d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-x)d\tau d\omega-\frac{i}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega(\tau-x)d\tau d\omega}_{0}$$

موهومی

انتگرال فوریه

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-x)d\tau\right]d\omega}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-x)d\tau\right]d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\cos\omega x d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\sin\omega x d\tau\right]d\omega$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 17

تبدیل فوریه

فرم مختلط انتگرال فوریه

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right]d\omega$$

زوج تبدیل فوریه در حالت مختلط

تبدیل معکوس فوریه

تبدیل فوریه

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\ F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx \end{cases}$$

خواص

$$FT\{af\}=aFT\{f\}=aF(\omega)$$

تبدیل خطی

$$FT\{af+bg\}=aFT\{f\}+bFT\{g\}=aF(\omega)+bG(\omega)$$

زوج تبدیل فوریه برای حالت تابع زوج و فرد؟

Dr. Hasan Ghasemzadeh 18

تبدیل فوریه

اگر تابع زوج باشد

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\cos\omega x)d\tau+\cancelto{0}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\sin\omega x)d\tau}\right]d\omega$$

انتگرال کسینوسی فوریه

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\cos\omega x d\tau\right]d\omega$$

زوج تبدیل فوریه برای تابع زوج

تبدیل معکوس فوریه

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\cos\omega x d\omega$$

تبدیل فوریه

$$F(\omega)=\int_0^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 19

تبدیل فوریه

اگر تابع فرد باشد

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cancelto{0}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\cos\omega x)d\tau}+\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\sin\omega x)d\tau\right]d\omega$$

انتگرال سینوسی فوریه

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\sin\omega x d\tau\right]d\omega$$

زوج تبدیل فوریه برای تابع فرد

تبدیل معکوس فوریه

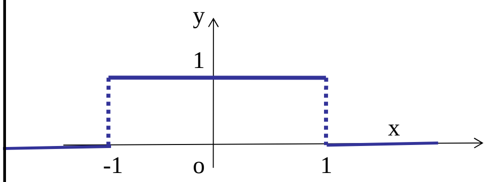
$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\sin\omega x d\omega$$

تبدیل فوریه

$$F(\omega)=\int_0^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 20

تبدیل فوریه



مثال انتگرال فوریه؟

تابع زوج : انتگرال کسینوسی فوریه

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\cos\omega x\,d\tau\right]d\omega$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{1} 1\cos\omega\tau\cos\omega x\,d\tau\right]d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\right]_0^1\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x\,d\omega$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin[\omega(x+1)]}{2\omega}d\omega-\int_0^{\infty}\frac{\sin[\omega(x-1)]}{2\omega}d\omega\right]$$

$$f(x)=\lim_{\omega_0\to\infty}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\omega_0}\frac{\sin[\omega(x+1)]}{\omega}d\omega-\int_0^{\omega_0}\frac{\sin[\omega(x-1)]}{\omega}d\omega\right]$$

$$z=\omega(x+1)\quad dz=(x+1)d\omega\qquad \frac{dz}{z}=\frac{d\omega}{\omega}$$

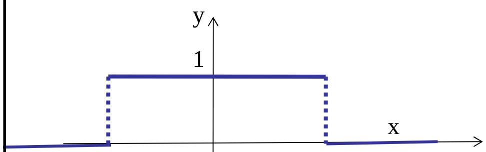
$$z=\omega(x-1)\quad dz=(x-1)d\omega\qquad \frac{dz}{z}=\frac{d\omega}{\omega}$$

$$f(x)=\lim_{\omega_0\to\infty}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\omega_0(x+1)}\frac{\sin z}{z}dz-\int_0^{\omega_0(x-1)}\frac{\sin z}{z}dz\right]$$

انتگرال فوریه

Dr. Hasan Ghasemzadeh 21

تبدیل فوریه



مثال

$$f(x)=\lim_{\omega_0\to\infty}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\omega_0(x+1)}\frac{\sin z}{z}dz-\int_0^{\omega_0(x-1)}\frac{\sin z}{z}dz\right]$$

انتگرال فوریه

می دانیم $\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$

$$x=\pm1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{2}$$

$$-1<x<1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right]=1$$

$$-1>x,\,x>1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]=0$$

انتگرال سینوسی $si(z)=\int_0^{z}\frac{\sin z}{z}dz$ $\quad f(x)=\lim_{\omega_0\to\infty}\frac{1}{\pi}\left[si(\omega_0(x+1))-si(\omega_0(x-1))\right]$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 22

تبدیل فوریه

مثال با استفاده از تبدیل فوریه تابع $x>0, m>0$ $f(x)=e^{-mx}$ انتگرال لاپلاس را محاسبه کنید

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{m^2+\omega^2}d\omega=?$$

تبدیل فوریه $F(\omega)=\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$

$$F(\omega)=\int_0^\infty e^{-mx}\cos\omega x dx$$

$$F(\omega)=e^{-mx}\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty(-m)e^{-mx}\frac{\sin\omega x}{\omega}dx$$

$$=0-0+\frac{m}{\omega}\left[e^{-mx}\frac{-\cos\omega x}{\omega}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty(-m)e^{-mx}\frac{-\cos\omega x}{\omega}dx\right]$$

$$F(\omega)=\frac{m}{\omega}\left[\frac{1}{\omega}-\frac{m}{\omega}\int_0^\infty e^{-mx}\cos\omega x dx\right]=\left[\frac{m}{\omega^2}-\frac{m^2}{\omega^2}F(\omega)\right]$$

$$F(\omega)\left(1+\frac{m^2}{\omega^2}\right)=\frac{m}{\omega^2}\qquad F(\omega)=\frac{m}{m^2+\omega^2}$$ تبدیل فوریه

تبدیل فوریه

انتگرال لاپلاس $I=\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{m^2+\omega^2}d\omega=?$

تبدیل معکوس فوریه $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\cos\omega x d\omega$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\cos\omega x d\omega$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{m}{m^2+\omega^2}\cos\omega x d\omega=\frac{2m}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{m^2+\omega^2}d\omega$$

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{m^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2m}f(x)=\frac{\pi}{2m}e^{-mx}$$

تبدیل سینوسی فوریه این تابع نتیجه می دهد

$$I=\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{m^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-mx}$$

تبدیل فوریه-کانولوشن

تعریف

$$f(x)*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz = f*g$$

$$f*g=g*f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)g(z)dz$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx$$

خواص

$$FT\{f*g\}=FT\{f\}FT\{g\}=F(\omega)G(\omega)$$

$$FT\{fg\}=FT\{f\}*FT\{g\}=F(\omega)*G(\omega)$$

$$FT^{-1}\{F(\omega)G(\omega)\}=f*g$$

$$FT^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=fg$$

تبدیل فوریه- خواص

خواص

$$FT\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}_{if\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y\to 0\end{cases}}=i\omega FT\{f\}=i\omega F(\omega)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f(x)}{\partial x}e^{-i\omega x}dx = f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=i\omega F(\omega)$$

$$FT\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\}_{if\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y,\frac{\partial f}{\partial x}\to 0\end{cases}}=(i\omega)^2 FT\{f\}$$

$$FT\left\{\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right\}_{if\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y,f^{(1)},f^{(2)},\ldots,f^{(n-1)}\to 0\end{cases}}=(i\omega)^n FT\{f\}$$

مشتق نسبت به پارامتری که

در تبدیل نیست $f=f(x,t)$

$$FT\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=\frac{\partial}{\partial t}FT(f)=\frac{\partial F(\omega,t)}{\partial t}$$

اثبات

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}e^{-i\omega x}dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-i\omega x}dx=\frac{\partial}{\partial t}F(\omega)$$

تبدیل فوریه

مثال حل توزیع حرارت با استفاده از تبدیل فوریه

میله یک بعدی نامحدود $t>0, -\infty<x<\infty$

$$T_t = kT_{xx}$$
$$T(x,0)=f(x)$$
$$T(x,t)<M$$

$$FT\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} = FT\left\{k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right\} = k\,FT\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}FT\{T\} = k(i\omega)^2\,FT\{T\}$$

$$y = FT\{T\} \quad \Rightarrow y' = k(i\omega)^2\,y \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = k(i\omega)^2 \quad \Rightarrow \ln(y) = k(i\omega)^2 t + c$$

$$\Rightarrow y = e^{k(i\omega)^2 t + c}$$

$$y = FT\{T\} = e^{-k\omega^2 t + c} = Ce^{-k\omega^2 t} \qquad t=0 \quad \Rightarrow FT\{T(x,0)\} = C$$

شرایط اولیه $FT\{T(x,0)\} = FT\{f(x)\} = C$

$$y = FT\{T\} = FT\{f(x)\}e^{-k\omega^2 t}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 27

تبدیل فوریه

استفاده از قضیه کانولوشن

$$y = FT\{T\} = FT\{f(x)\}e^{k(i\omega)^2 t}$$
$$G(\omega) = e^{k(i\omega)^2 t} \quad \Rightarrow g(x) = ?$$

$$g(x) = FT^{-1}\{G(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{\frac{-x^2}{4kt}}$$

$$FT\{T\} = FT\{f*g\} = FT\{f\}FT\{g\} \qquad \Rightarrow T = f*g$$

$$T = f*g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}e^{\frac{-(x-z)^2}{4kt}}\,dz$$

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}e^{\frac{-(x-z)^2}{4kt}}\,dz$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 28

تبدیل فوریه گسسته

Discrete Fourier transform (DFT)

اگر به جای تابع یکسری عدد داشته باشیم
با استفاده از الگوریتم fft توسط کامپیوتر
تبدیل صورت می پذیرد

$$(\mathcal{F}\mathbf{f})_n = \sum_{m=1}^{N} f_m e^{-i2\pi(n-1)(m-1)/N}$$

N طول سیگنال f

$$f_m = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} (\mathcal{F}\mathbf{f})_n e^{i2\pi(n-1)(m-1)/N}$$

تبدیل معکوس

$$\cos 2\pi\nu x = \frac{1}{2}e^{-i2\pi\nu x} + \frac{1}{2}e^{i2\pi\nu x} \qquad \sin 2\pi\nu x = \frac{i}{2}e^{-i2\pi\nu x} - \frac{i}{2}e^{i2\pi\nu x}$$

فرکانس ها $\nu, -\nu$

خواص

خطی بودن

$$\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g} \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \alpha\mathcal{F}\mathbf{f} + \beta\mathcal{F}\mathbf{g}$$

داشتن تناوب

$$(\mathcal{F}\mathbf{f})_{n+N} = (\mathcal{F}\mathbf{f})_n$$

تساوی پارسوال-بقای انرژی

$$\sum_{m=1}^{N} |f_m|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |(\mathcal{F}\mathbf{f})_n|^2$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 29

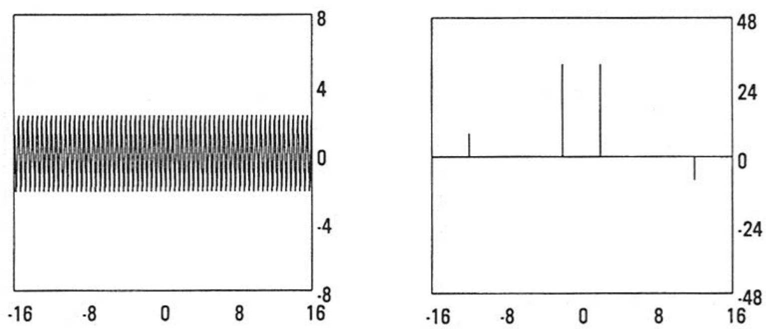
تبدیل فوریه گسسته

Discrete Fourier transform (DFT)

مثال

$$g_1(x) = 2\cos 4\pi x + 0.5\sin 24\pi x$$

۱۰۲۴ نقطه بین ۱۶- و ۱۶



Dr. Hasan Ghasemzadeh 30

تبدیل فوریه

2 Hz + 10 Hz + 20Hz

Stationary

موج ایستا

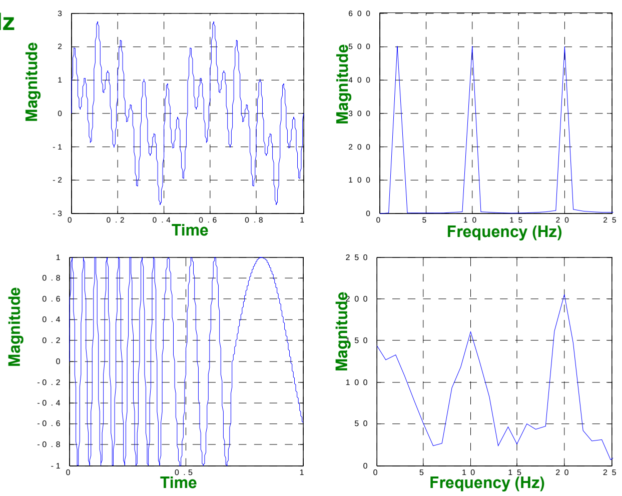
تمام فرکانسها در تمام زمانها وجود دارند

0.0-0.4: 2 Hz +
0.4-0.7: 10 Hz +
0.7-1.0: 20Hz

Non-Stationary

موج غیر ایستا

فرکانسها در زمان تغییر می کنند



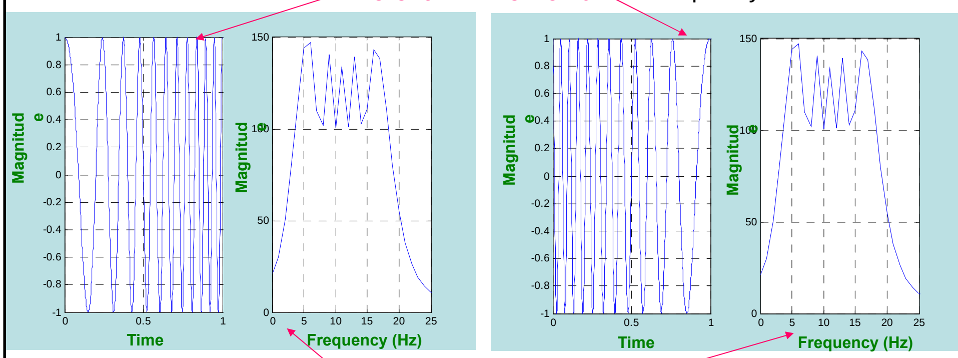
Dr. Hasan Ghasemzadeh 31

تبدیل فوریه

Frequency: 2 Hz to 20 Hz

Different in Time Domain

Frequency: 20 Hz to 2 Hz



Same in Frequency Domain

مولفه های فرکانس در چه زمانی اتفاق می افتند؟

تغییرات ناگهانی تابع در تمامی فرکانس ها توزیع می شود وبرعکس

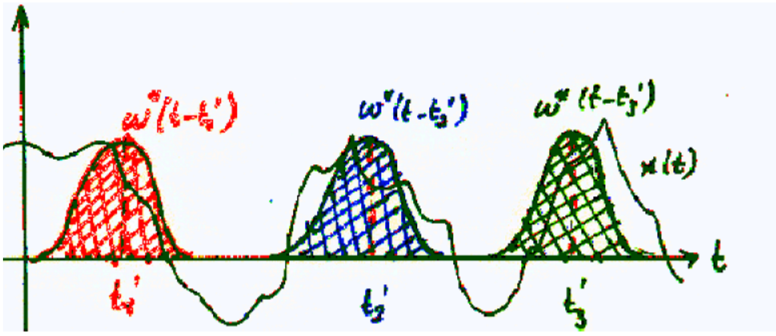
Dr. Hasan Ghasemzadeh 32

تبدیل فوریه زمان کوتاه

SHORT TIME FOURIER TRANSFORM (STFT)

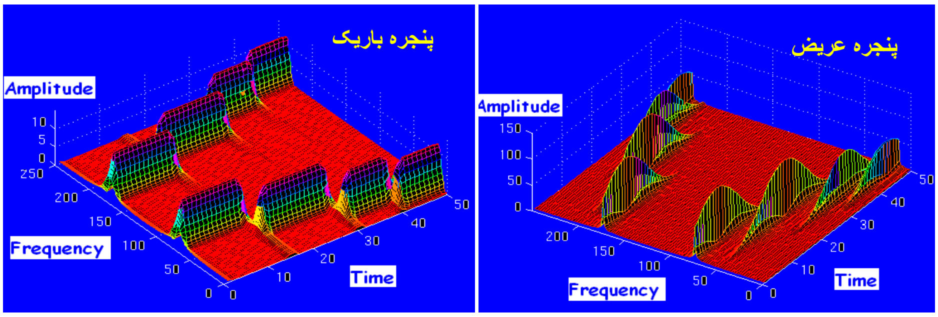
$$\mathrm{STFT}_X^{(\omega)}(t', f) = \int_t \left[x(t) \bullet \omega^*(t - t')\right] \bullet e^{-i2\pi ft}\, dt$$

$\omega(t)$: the window function



Dr. Hasan Ghasemzadeh 33

تبدیل فوریه زمان کوتاه



پنجره ثابت

پنجره باریک دارای تفکیک فرکانس ضعیف است

پنجره عریض دارای تفکیک زمانی ضعیف است

طبق اصل عدم قطعیت هازینبرگ نمی‌توان زمان دقیق یک فرکانس را تعیین کرد

تبدیل موجک با استفاده از پنجره های کوچک در فرکانس های بالا وپنجره های بزرگ
درفرکانس های پایین زمان هر فرکانس را مشخص می کند(پارامتر های مقیاس و انتقال

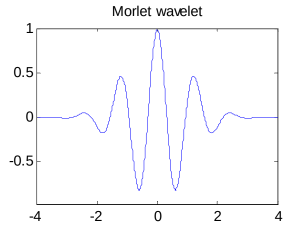
Dr. Hasan Ghasemzadeh 34

wavelet موجک

موجک $\psi(t)$ تابعی نوسانی و کوتاه مدت است

نمونه موجک مادر

Morlet wavelet



پارامتر پهنای باند

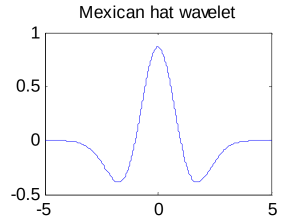
σ فرکانس زاویه‌ای مرکز

ω_0 موجک Z

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}}$$

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$$

Mexican Hat



$$\psi\ (t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}(1 - 2\pi(t/\sigma)^2)e^{-\pi(t/\sigma)^2}$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

wavelet transform تبدیل موجک

تبدیل موجک تابع (سیگنال) را به یکسری توابع موجک تجزیه می کند

موجک ها از موجک مادر $\psi(t)$ توسط مقیاس و انتقال بدست می آیند

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

a پارامتر مقیاس

b پارامتر انتقال

انرژی تبدیل فوریه موجک $\Psi(\omega)$ محدود است

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

تبدیل موجک پیوسته

continuous wavelet transform (DWT)

تبدیل موجک پیوسته
برای تابع f برابراست با

$$Tf(a,b) = < f, \psi_{a,b} > = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \psi^{*}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Scale
Translation
(The location of the window)
Mother Wavelet

انرژی تبدیل فوریه موجک $\Psi(\omega)$ محدود است

$$C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^{2}}{\omega} d\omega < +\infty$$

تبدیل معکوس

$$f(t) = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(a,b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^{2}}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 37

تبدیل موجک گسسته

Discrete wavelet transform (DWT)

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

a پارامتر مقیاس
b پارامتر انتقال

موجک‌های گسسته همانند موجک‌های پیوسته بوده با این تفاوت که پارامترهای مقیاس و انتقال در بازه‌های گسسته محاسبه می‌شوند.

پارامتر بصورت گسسته

$$a = 2^{-j}$$
$$b = 2^{-j} k$$

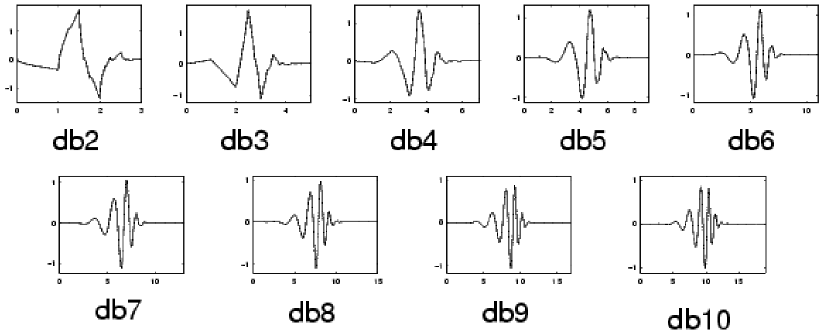
j,k اعداد صحیح

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^{j} t - k)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 38

تبدیل موجک گسسته
Discrete wavelet transform (DWT)

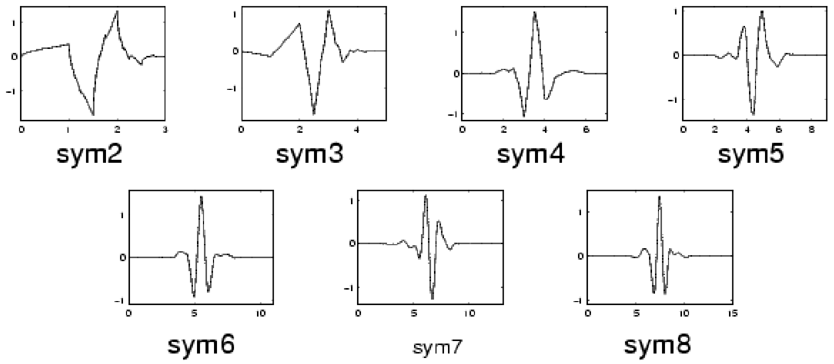
Daubechies wavelet



Dr. Hasan Ghasemzadeh 39

تبدیل موجک گسسته
Discrete wavelet transform (DWT)

Symlet wavelet



Dr. Hasan Ghasemzadeh 40

موجک

- Scale
  - a>1: dilate the signal
  - a<1: compress the signal
- Low Frequency -> High Scale -> Non-detailed Global View of Signal -> Span Entire Signal
- High Frequency -> Low Scale -> Detailed View Last in Short Time
- Only Limited Interval of Scales is Necessary

مراحل تبدیل

۱- موجک با مقیاس یک در ابتدای سیگنال قرار داده می شود

۲- موجک در سیگنال ضرب شده و در زمان انتگرال گرفته می شود

۳- به اندازه پارامتر انتقال موجک جابجا شده و مرحله دو تکرار می شود

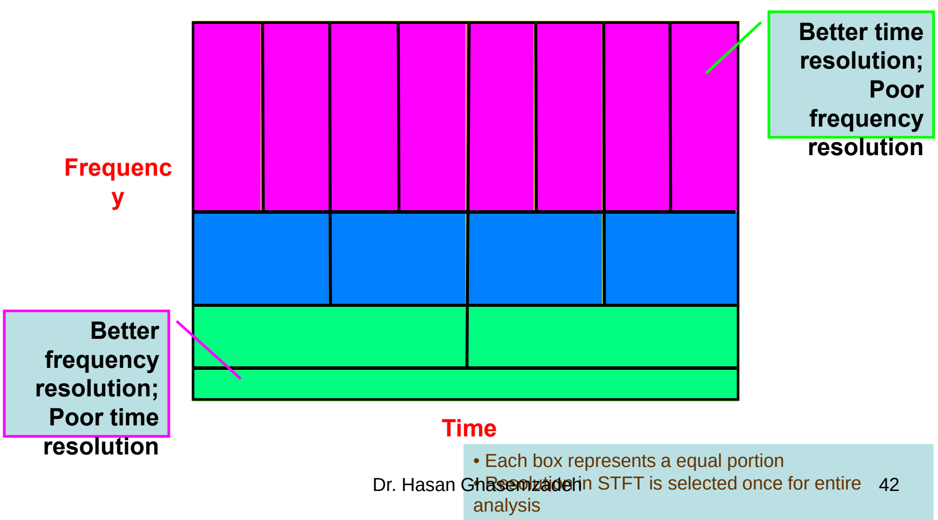
۴- مراحل ۲ و ۳ تکرار می شود تا موجک به انتهای سیگنال برسد

۵- مقیاس کمی افزایش یافته و مراحل فوق تکرار می شود

۶- نتیجه هر مقیاس و انتقال یک آرایه ماتریس ضرایب را پر می کند

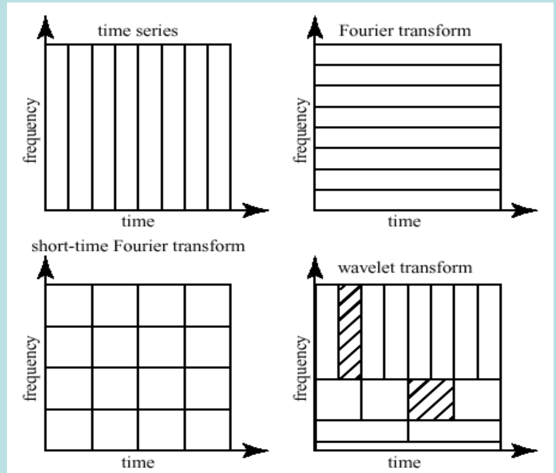
Dr. Hasan Ghasemzadeh 41

موجک



Dr. Hasan Ghasemzadeh 42

موجک



From http://www.cerm.unifi.it/EUcourse2001/Gunther_lecturenotes.pdf, p.10

Dr. Hasan Ghasemzadeh 43

مثال کاربردی از موجک

کاربرد دستگاه GPR

کاربری ژئوتکنیکی و محیط زیستی

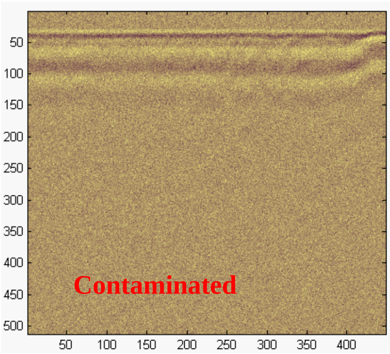
شناسایی تاسیسات زیرزمینی

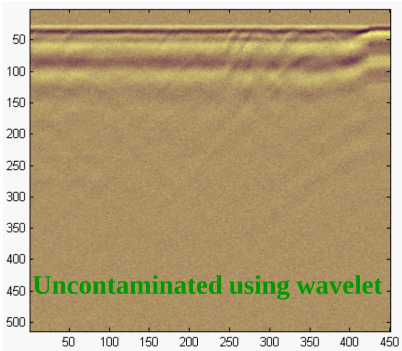
Dr. Hasan Ghasemzadeh 44

مثال کاربردی از موجک

مثال کاربردی

استفاده از موجک برای حذف نوفه در دستگاه GPR





Dr. Hasan Ghasemzadeh 45