Partial Differential Equations (PDEs)

معادلات دیفرانسیل جزئی

Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

تفکیک متغیرها

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ انتشار موج درسیم مرتعش

شرایط اولیه $u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x)$

شرایط مرزی $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$

فرض برای جواب

$$U = F(x)G(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

با جایگذاری در معادله موج

$$F\ddot{G} = c^2 F''G \rightarrow \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k \quad \Rightarrow \begin{cases} F'' - KF = 0 \\ \ddot{G} - c^2 GK = 0 \end{cases}$$

3 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

انتشار موج درسیم مرتعش

شرایط مرزی $u(l,t) = F(l)G(t) = 0, \quad u(0,t) = F(0)G(t) = 0,$

$$G(t) = 0 \rightarrow U = FG = 0 \Rightarrow G(t) \neq 0$$

$$\Rightarrow F(l) = 0, \quad F(0) = 0$$

علامت K

$K = 0$

$$F''(x) = 0 \rightarrow F(x) = Ax + B$$

$$F(0) = B = 0 \quad F(l) = Al = 0 \rightarrow A = 0 \quad \Rightarrow F = 0 \ or \ u = 0$$

مورد نظر ما نیست

4 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

ادامه

براي مقادير مثبت K

$$K = \mu^2$$

$$F''(x) - \mu^2 F(x) = 0$$

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

$$F(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$F(l) = Ae^{\mu L} - Ae^{-\mu L} = A\left(e^{\mu L} - e^{-\mu L}\right) = 0 \Rightarrow A = B = 0$$

$$\Rightarrow F = 0 \quad or \quad u = 0$$

مورد نظر ما نيست

تفکیک متغیرها

ادامه

مقادير منفی K

$$k = -\rho^2$$

$$F''(x) + \rho^2 F(x) = 0$$

$$F(x) = A\cos\rho x + B\sin\rho x$$

$$F(0) = A = 0$$

$$F(L) = B\sin\rho L = 0$$

$$\rho L = n\pi, \qquad \rho = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots..$$

$$F_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$K = -\rho^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$\ddot{G} + c^2\rho^2 G = 0, \quad \ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = c\rho = \frac{cn\pi}{L}$$

تفکیک متغیرها

ادامه

مقادیر منفی K

$G_n(t) = C_n \cos\lambda_n t + D_n \sin\lambda_n t$

$u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t)$

$u_n(x,t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L}(C_n \cos\lambda_n t + D_n \sin\lambda_n t)$

$u_n(x,t) = (A_n^* \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad B_n C_n = A_n^* \qquad B_n D_n = B_n^*$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^* \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x$

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x) \qquad A_n^* = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(-A_n^* \lambda_n \sin\lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos\lambda_n t)Sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$

7 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

ادامه

$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L} = g(x)$

$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$

$B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n = 1,2,3,\ldots$

با جایگذاری در معادله

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\cos\lambda_n t + \left(\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\lambda_n t\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

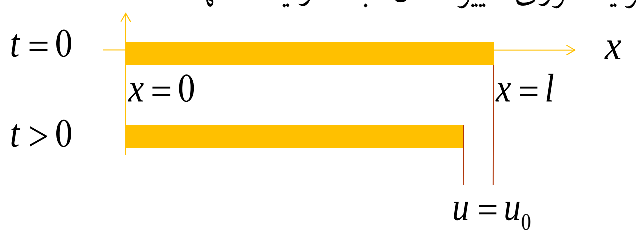
8 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$

انتشار موج درمیله با طول محدود

شرایط مرزی تغییر مکان ثابت در یک انتها



شرایط اولیه $t=0 \qquad u=0, u_t=0$

انتهای آزاد

شرایط مرز
$$\begin{cases} x=0, t>0 & u_x=0 \\ x=l, t>0 & u=u_0 \end{cases}$$

9 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

انتشار موج درمیله با طول محدود

جواب

$$u=X(x)T(t)$$

$$u=X(x)(A\cos\omega_k t+B\sin\omega_k t)$$

جایگذاری در معادله

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{\omega_k^2}{c^2}X=0$$

$$X=C\cos\frac{\omega_k x}{c}+D\sin\frac{\omega_k x}{c}$$

$$\frac{dX}{dx}=\frac{\omega_k}{c}(-C\sin\frac{\omega_k x}{c}+D\cos\frac{\omega_k x}{c})$$

10 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

انتشار موج درمیله با طول محدود

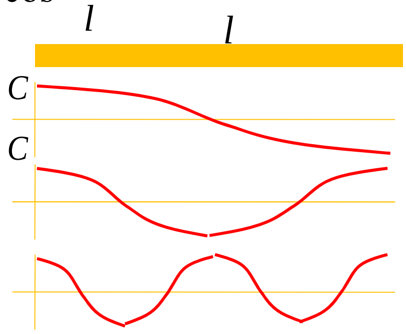
دو انتهای آزاد

$$x=0 \quad \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dx}}=0 \quad D=0$$

$$x=l \quad \frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{dx}}=0 \qquad C\sin\frac{\omega_k l}{c}=0 \qquad \frac{\omega_k l}{c}=k\pi \qquad \omega_k=\frac{k\pi c}{l}$$

$$X_k = C\cos\frac{k\pi x}{l}$$

رسم هارمونیک های مختلف



11 Dr. Hasan Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی

- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو

12 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

فرم کلی تبدیلات انتگرال

$$F(s)=\int_a^b k(s,t)\,f(t)dt$$

تبدیلات انتگرال مشتق را به ضرب تبدیل می کند و مشتقات جزیی را به معادله جبری تبدیل می کند
با این روش می توان از تعداد متغیر ها کاست

تبدیل لاپلاس

$$\mathrm{L}f=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

تبدیل معکوس لاپلاس

$$\mathrm{L}^{-1}F=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds$$

13 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

تبدیل لاپلاس

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-\alpha)$
$\sin\alpha t$	$a/(s^2+a^2)$
$\cos\alpha t$	$s/(s^2+a^2)$
$\frac{\sin\alpha t}{t}$	$arctg\ (a/s)$

$$\mathrm{L}f'(t)=\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt=sF(s)-f(0)$$

$$\mathrm{L}f''(t)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

مثال

$$\frac{df(t)}{dt}+2f=0 \qquad f(0)=5$$

$$(s+2)F(s)-5=0\Rightarrow F(s)=\frac{5}{s+2}\Rightarrow f(t)=5e^{-2t}$$

14 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

مثال حل معادله موج

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

شرایط مرزی $x=0, t>0 \quad \sigma = -P_0$

تغییر متغیر $\bar{u}(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt$

$$L u_{tt} = L(c^2 u_{xx})$$

در ابتدا تغییر مکان صفر است

$$\bar{u}_{xx} = \frac{s^2}{c^2}\bar{u}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = Ae^{\left(-sx/c\right)}$$

A از شرایط مرزی بدست می آید

15 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

مثال حل معادله موج

شرایط مرزی $x=0, t>0 \quad \sigma = -P_0$

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial u}{\partial x} = -P_0$$

تبدیل لاپلاس شرایط مرزی

$$E\frac{\partial u}{\partial x} = -P_0 \qquad \Rightarrow E\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{-P_0}{s}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-P_0 c}{Es^2}$$ با جایگذاری در جواب

جواب معادله تبدیل یافته

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{-P_0 c}{Es^2} e^{\left(-sx/c\right)}$$

با تبدیل معکوس لاپلاس

$$u = \frac{P_0 c(t - x/c)}{E} H(t - x/c)$$

$H(t-t_0)$ تابع پله ای واحد Heaviside

$$H(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t < t_0 \\ 1 & \text{if} \quad t > t_0 \end{cases}$$

16 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

تبدیل سینوسی فوریه

$$\mathfrak{J}_s f = F(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt$$

تبدیل معکوس سینوسی فوریه

$$\mathfrak{J}_s^{-1} F = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\sin(\omega t)d\omega$$

تبدیل کسینوسی فوریه

$$\mathfrak{J}_c f = F(\omega) = \int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)dt$$

تبدیل معکوس کسینوسی فوریه

$$\mathfrak{J}_c^{-1} F = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\cos(\omega t)d\omega$$

17 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

روابط

$$\mathfrak{J}_s f' = -\omega \mathfrak{J}_c f$$

$$\mathfrak{J}_s f'' = \omega f(0) - \omega^2 \mathfrak{J}_s f$$

$$\mathfrak{J}_c f' = f(0) + \omega \mathfrak{J}_s f$$

$$\mathfrak{J}_c f'' = -f'(0) - \omega^2 \mathfrak{J}_c f$$

18 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

مثال حل معادله پخش حرارت

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad \infty < x < \infty$$

$u(0,t) = A \qquad 0 < t < \infty$ شرایط مرزی

$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x < \infty$ شرایط اولیه

تبدیل سینوسی فوریه

$$\mathrm{J}_s u_t = a^2 \mathrm{J}_s u_{xx}$$

$$\mathrm{J}_s u_t = \int_0^\infty u_t(x,t)\sin(\omega x)dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty u(x,t)\sin(\omega x)dx$$

متغیری که حذف می شود

$$\mathrm{J}_s u_t = \frac{d}{dt}\mathrm{J}_s u = \frac{d}{dt}U(t)$$

$$\mathrm{J}_s u_{xx} = \omega u(0,t) - \omega^2 \mathrm{J}_s u = \omega A - \omega^2 U(t)$$

BC

19 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

مثال

معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dU}{dt} = \alpha^2\left[\omega A - \omega^2 U(t)\right]$$

$IC \qquad \mathrm{J}_s u(x,0) = U(0) = 0$

تبدیل به معادله کامل با فاکتور انتگرال گیری

$$U = \frac{A}{\omega}\left[1 - e^{-\omega^2\alpha^2 t}\right]$$

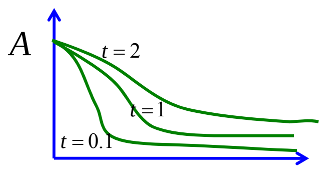
تبدیل معکوس

$$u(x,t) = \mathrm{J}_s^{-1} U = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{A}{\omega}\left[1 - e^{-\omega^2\alpha^2 t}\right]\sin(\omega x)d\omega$$

متغیرحذف شده

$$u(x,t) = \mathrm{J}_s^{-1} U = A\,erfc\left(x/2\alpha\sqrt{t}\right)$$

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$



20 Dr. Hasan Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی
- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو

21 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

مساله اشترم لیویل

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx})+\left(q(x)+\lambda r(x)\right)y=0$$ **Sturm-Liouville equation**

$$Ly+\lambda r(x)y=0$$

$$L=\frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx})+q$$

p,q,r توابع حقیقی معلوم

λ مقدار ثابت

y تابع مجهول

اگر q,r پیوسته و p پیوسته و مشتق پذیر باشد معادله حتما جواب دارد

اگر p,r در بازه $[a,b]$ مثبت باشند معادله منظم نامیده می شود و بازای هر λ دو جواب مستقل خطی خواهد داشت

22 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

Sturm-Liouville system

$$Ly + \lambda r(x) y = 0 \qquad L = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

λ مقدار ویژه است اگر سیستم مقابل جواب غیر صفر داشته باشد

در اینصورت جوابهای سیستم توابع ویژه نامیده می شوند

Periodic Sturm-Liouville system

$$Ly + \lambda r(x) y = 0$$

$$p(a) = p(b)$$
$$y(a) = y(b)$$
$$y'(a) = y'(b)$$

23 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

Sturm-Liouville system

مثال

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

شرایط مرزی

$\lambda \le 0 \Rightarrow$ مقدار ویژه نیست

$$\lambda > 0 \Rightarrow \quad y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ y'(\pi) = 0 & \Rightarrow B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4} \qquad n = 1,2,..$$ مقادیر ویژه

$$\sin\frac{2n-1}{2}x \qquad n = 1,2,..$$ توابع ویژه

24 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems

توابع متعامد

۱- حاصلضرب داخلی دو تابع حقیقی $f(x), g(x)$ در فاصله $a \le x \le b$

و با تابع وزنی $w(x)$ برابر است با

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

حاصلضرب داخلی استاندارد $w(x)=1$

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

۲- نورم تابع $f(x)$ در فاصله $a \le x \le b$

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f(x)^2 w(x)dx}$$

۳- اگر حاصلضرب در فاصله $(f,g)=0$ باشد توابع $f(x), g(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ و با تابع وزنی $w(x)$ متعامد نامیده می شوند

توابع متعامد $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx=0$

25 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems

توابع متعامد

۴- مجموعه توابع $\{\varphi_n(x)\}_{n=0,1,2,...}$ یک مجموعه متعامد است اگر

$$\begin{cases} n \ne m \Rightarrow & (\varphi_n,\varphi_m)=0 \\ n=m \Rightarrow & (\varphi_n,\varphi_m)=\|\varphi_n\|^2 \ne 0 \end{cases}$$

مجموعه نرمال متعامد است اگر $\|\varphi_n\|^2=1$

۵- اگر مجموعه $\{\varphi_n(x)\}_{n=0,1,2,...}$ متعامد باشد مجموعه نرمال متعامد مربوطه عبارتست از

$$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|}$$

26 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems

توابع متعامد

مثال مجموعه توابع $\{\sin(nx)\}_{n=0,1,2,...}$ در فاصله $(0,\pi)$ با تابع وزنی $w(x)=1$ یک مجموعه متعامد است

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(-\cos(n+m)x+\cos(n-m)x)dx$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{\sin(n+m)x}{(n+m)}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\frac{\sin(n-m)x}{(n-m)}\Big|_0^\pi = 0 \qquad n\neq m$$

$$\int_0^\pi \sin^2(nx)dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos(2nx))dx = \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2n}\sin(2nx)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \qquad n=m$$

مجموعه نرمال متعامد مربوطه عبارتست از

$$\psi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\|\varphi_n(x)\|} = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\int_0^\pi \sin^2 xdx}} = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi/2}}$$

27 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems

مقادیر ویژه

۶- یک عملگر دیفرانسیل L را نسبت به حاصلضرب داخلی خود الحاق گوییم هرگاه برای هر تابع مانند f,g در محدوده عملگر L داشته باشیم :

$(Lf,g)=(f,Lg)$ **Self adjoint**

قضایا

۱- یک عملگر دیفرانسیل خطی بصورت

$$L=\left[\frac{d}{dx}(P(x)\frac{d}{dx})+q(x)\right]$$

نسبت به حاصلضرب داخلی استاندارد روی فاصله (a,b) با شرایط مرزی تعریف شده به صورت زیر

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases}$$

خود الحاق می باشد

28 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

قضایا

۲- یک عملگر دیفرانسیل خطی بصورت

$$L=\frac{1}{r(x)}\left[\frac{d}{dx}(P(x)\frac{d}{dx})+q(x)\right]$$

نسبت به حاصلضرب داخلی روی فاصله (a,b) با تابع وزنه $r(x)$ و با شرایط مرزی تعریف شده به صورت زیر

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases}$$

خود الحاق می باشد

29 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

قضایا

۳- هر عملگر دیفرانسیل خطی از مرتبه دوم را می توان بصورت خود الحاق نوشت

عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بصورت کلی

$$L=\left[a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)\right]$$

از قضیه قبل توابع مناسب را می یابیم

$$L=\frac{p(x)}{r(x)}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{r(x)}\frac{dp(x)}{dx}\frac{d}{dx}+\frac{q(x)}{r(x)}$$

$$\begin{cases}a_2(x)=\dfrac{p(x)}{r(x)}\\ a_1(x)=\dfrac{1}{r(x)}\dfrac{dp(x)}{dx}\\ a_0(x)=\dfrac{q(x)}{r(x)}\end{cases}$$

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=\frac{1}{p(x)}\frac{dp(x)}{dx}\Rightarrow\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx=\int\frac{1}{p(x)}\frac{dp(x)}{dx}dx=\ln p(x)+\overset{0}{c}$$

$$\boxed{p(x)=\exp(\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)})}$$

$$\boxed{r(x)=\frac{p(x)}{a_2(x)}}$$

$$\boxed{q(x)=a_0(x)r(x)}$$

30 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

قضایا

۴- بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه مختلف یک عملگر خود الحاق ، متعامدند

فرض کنید λ_m, λ_n دو مقدار ویژه متفاوت ازعملگر خود الحاق L با بردارهای ویژه y_m, y_n باشد

$$\begin{cases} Ly_m = \lambda_m y_m \\ Ly_n = \lambda_n y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Ly_m, y_n) = (\lambda_m y_m, y_n) & ۱ \\ (Ly_n, y_m) = (\lambda_n y_n, y_m) & ۲ \end{cases} \quad \Rightarrow (Ly_m, y_n) = (\lambda_m y_m, y_n) = (y_m, Ly_n) \quad ۳$$

خود الحاق

۲-۳ $$(Ly_n, y_m) - (y_m, Ly_n) = (\lambda_n y_n, y_m) - (\lambda_m y_m, y_n) = \lambda_n (y_n, y_m) - \lambda_m (y_m, y_n) = (\lambda_n - \lambda_m)(y_n, y_m) = 0$$

$$(\lambda_n \neq \lambda_m) \Rightarrow (y_n, y_m) = 0$$

31 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

قضایا

۵- مقادیر ویژه یک عملگر خود الحاق ،حقیقی هستند

$$Ly = \lambda_m y$$

$$(Ly, y) = (\lambda y, y) = \lambda (y, y) = \bar{\lambda}(y, y)$$

معادله و تمام ضرایب حقیقی هستند

بنابرین اگر λ مقدار ویژه آن باشد $\bar{\lambda}$ نیز مقدار ویژه آنست

$$\lambda (y, y) = \bar{\lambda}(y, y)$$

$$(\lambda - \bar{\lambda})(y, y) = 0$$

$$(y, y) \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

λ حقیقی است

قضایای فوق برای عملگر اشترم لیویل صادق است

32 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

مثال

Euler equation

$$x^2y''+xy'+\lambda y=0 \qquad 1\le x\le e$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$$

$$L=\left[a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)\right]$$

$$p(x)=\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\right) \Rightarrow p(x)=x$$

$$r(x)=\frac{p(x)}{a_2(x)} \Rightarrow r(x)=1/x$$

$$q(x)=a_0(x)r(x) \Rightarrow q(x)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{1}{x}\lambda y=0$$ **Sturm-Liouville system**

33 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

مثال

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{1}{x}\lambda y=0$$ **Sturm-Liouville system**

$$y=c_1x^{i\sqrt{\lambda}}+c_2x^{-i\sqrt{\lambda}} \qquad x^{i\sqrt{\lambda}}=e^{i\sqrt{\lambda}\ln x}=\cos(\sqrt{\lambda}\ln x)+i\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

$$y=A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x)+Bi\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

$$\begin{cases} y(1)=0 & \Rightarrow A=0 \\ y'(e)=0 & \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow \lambda_n=n^2\pi^2 \qquad n=1,2,\dots \end{cases}$$ مقادیر ویژه

$$\Rightarrow \sin(n\pi\ln x) \qquad n=1,2,\dots$$ توابع ویژه

34 Dr. Hasan Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی

- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو

35 Dr. Hasan Ghasemzadeh