Partial Differential Equations (PDEs)

معادلات دیفرانسیل جزئی

Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی
- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو

تفکیک متغیرها

انتشار موج درسیم مرتعش

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

شرایط اولیه $u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x)$

شرایط مرزی $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$

فرض برای جواب

$$U = F(x)G(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

با جایگذاری در معادله موج

$$F\ddot{G} = c^2 F''G \rightarrow \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k \Rightarrow \begin{cases} F'' - KF = 0 \\ \ddot{G} - c^2 GK = 0 \end{cases}$$

3 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

انتشار موج درسیم مرتعش

شرایط مرزی $u(l,t) = F(l)G(t) = 0, \quad u(0,t) = F(0)G(t) = 0,$

$$G(t) = 0 \rightarrow U = FG = 0 \Rightarrow G(t) \neq 0$$
$$\Rightarrow F(l) = 0, \quad F(0) = 0$$

علامت K

$K = 0$

$$F''(x) = 0 \rightarrow F(x) = Ax + B$$

$$F(0) = B = 0 \quad F(l) = Al = 0 \rightarrow A = 0 \quad \Rightarrow F = 0 \text{ or } u = 0$$

مورد نظر ما نیست

4 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

ادامه

برای مقادیر مثبت K

$K = \mu^2$

$F''(x) - \mu^2 F(x) = 0$

$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$

$F(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$F(l) = Ae^{\mu L} - Ae^{-\mu L} = A\left(e^{\mu L} - e^{-\mu L}\right) = 0 \Rightarrow A = B = 0$

$\Rightarrow F = 0 \quad or \quad u = 0$

مورد نظر ما نیست

تفکیک متغیرها

ادامه

مقادیر منفی K

$k = -\rho^2$

$F''(x) + \rho^2 F(x) = 0$

$F(x) = A\cos\rho x + B\sin\rho x$

$F(0) = A = 0$

$F(L) = B\sin\rho L = 0$

$\rho L = n\pi, \qquad \rho = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots..$

$F_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$

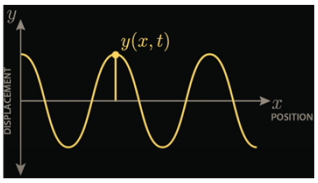
$K = -\rho^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

$\ddot{G} + c^2\rho^2 G = 0, \qquad \ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \lambda_n = c\rho = \frac{cn\pi}{L}$

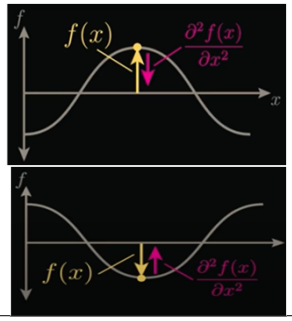
تفکیک متغیرها

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

انتشار موج درسیم مرتعش



$$\Rightarrow \begin{cases} F'' = -\rho^2 F \\ \ddot{G} = -c^2 \rho^2 G \end{cases}$$



$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = -\rho^2 F(x)$$

انحنا تغییرمکان

تفکیک متغیرها

ادامه

$$G_n(t) = C_n \cos\lambda_n t + D_n \sin\lambda_n t$$

مقادیر منفی K

$$u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t)$$

$$u_n(x,t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\left(C_n \cos\lambda_n t + D_n \sin\lambda_n t\right)$$

$$u_n(x,t) = \left(A_n^* \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad B_n C_n = A_n^* \qquad B_n D_n = B_n^*$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^* \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\frac{n\pi}{L}x = f(x) \qquad A_n^* = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n^* \lambda_n \sin\lambda_n t + B_n^* \lambda_n \cos\lambda_n t\right) Sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

تفکیک متغیرها

ادامه

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

$$B_n^* \lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1,2,3,\ldots..$$

با جایگذاری در معادله

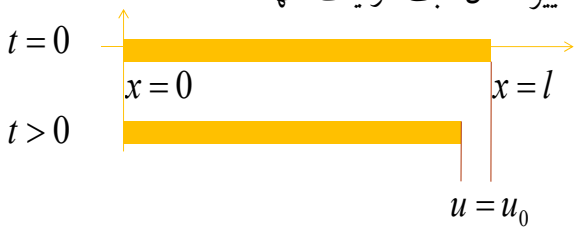
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\cos\lambda_n t + \left(\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\lambda_n t\right]\sin\frac{n\pi x}{L}$$

تفکیک متغیرها

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$

انتشار موج درمیله با طول محدود

شرایط مرزی تغییر مکان ثابت در یک انتها



شرایط اولیه $t=0 \quad u=0, u_t=0 \text{ or } u(x,0)=f(x)=\frac{x}{l}u_0,\ u_t(x,0)=g(x)=0$

شرایط مرزی $\begin{cases} x=0, t>0 & u_x=0 \\ x=l, t>0 & u=u_0 \end{cases}$ انتهای آزاد

تفکیک متغیرها

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ انتشار موج درمیله با طول محدود

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \cos \lambda_n t + \left(\frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin \lambda_n t \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$f(x) = \frac{x}{l} u_0,\ g(x) = 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2u_0}{n\pi} \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{l}$$

11 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

انتشار موج درمیله با طول محدود

$u = X(x)T(t)$ جواب

$u = X(x)(A\cos \omega_k t + B \sin \omega_k t)$

$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\omega_k^2}{c^2} X = 0$ جایگذاری در معادله

$$X = C\cos \frac{\omega_k x}{c} + D \sin \frac{\omega_k x}{c}$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{\omega_k}{c}(-C \sin \frac{\omega_k x}{c} + D \cos \frac{\omega_k x}{c})$$

12 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

انتشار موج درمیله با طول محدود

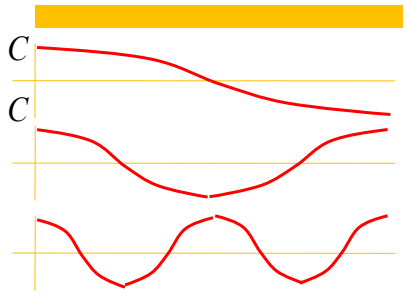
دو انتهای آزاد

$$x=0 \quad \frac{dX}{dx}=0 \quad D=0$$

$$x=l \quad \frac{dX}{dx}=0 \quad C\sin\frac{\omega_k l}{c}=0 \quad \frac{\omega_k l}{c}=k\pi \quad \omega_k=\frac{k\pi c}{l}$$

$$X_k=C\cos\frac{k\pi x}{l}$$

رسم هارمونیک های مختلف



13 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تفکیک متغیرها

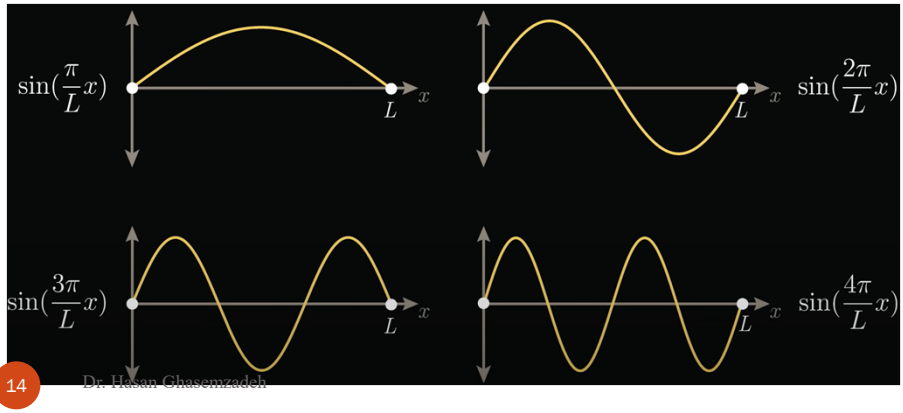
انتشار موج درمیله با طول محدود

دو انتهای گیردار

$$x=0,l \quad X=0$$

$$X=\sin(kx)$$

رسم هارمونیک های مختلف



14 Dr. Hasan Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی
- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو

15 Dr. Hasan Ghasemzadeh