Partial Differential Equations (PDEs)

معادلات دیفرانسیل جزئی

Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی

- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو

تبدیلات انتگرال

فرم کلی تبدیلات انتگرال

$$F(s)=\int_a^b k(s,t)f(t)dt$$

تبدیلات انتگرال مشتق را به ضرب تبدیل می کند و مشتقات جزیی را به معادله جبری تبدیل می کند
با این روش می توان از تعداد متغیر ها کاست

تبدیل لاپلاس

$$\mathscr{L}f=F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

تبدیل معکوس لاپلاس

$$\mathscr{L}^{-1}F=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds$$

3 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

تبدیل لاپلاس

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-\alpha)$
$\sin \alpha t$	$a/(s^2+a^2)$
$\cos \alpha t$	$s/(s^2+a^2)$
$\frac{\sin \alpha t}{t}$	$arctg\ (a/s)$

$$\mathscr{L}f'(t)=\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt=sF(s)-f(0)$$

$$\mathscr{L}f''(t)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

مثال

$$\frac{df(t)}{dt}+2f=0 \qquad f(0)=5$$

$$(s+2)F(s)-5=0\Rightarrow F(s)=\frac{5}{s+2}\Rightarrow f(t)=5e^{-2t}$$

4 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

مثال حل معادله موج

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

شرایط مرزی $x=0, t>0 \quad \sigma = -P_0$

تغییر متغیر $\bar{u}(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt$

$$\mathcal{L}u_{tt} = \mathcal{L}(c^2 u_{xx})$$

در ابتدا تغییر مکان صفر است

$$\bar{u}_{xx} = \frac{s^2}{c^2}\bar{u}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = Ae^{\left(-sx/c\right)}$$

A از شرایط مرزی بدست می آید

5 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

مثال حل معادله موج

شرایط مرزی $x=0, t>0 \quad \sigma = -P_0$

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial u}{\partial x} = -P_0$$

تبدیل لاپلاس شرایط مرزی

$$E\frac{\partial u}{\partial x} = -P_0 \qquad \Rightarrow E\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{-P_0}{s}$$

$$\Rightarrow A = \frac{-P_0 c}{Es^2}$$

با جایگذاری در جواب

جواب معادله تبدیل یافته

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{-P_0 c}{Es^2}e^{\left(-sx/c\right)}$$

با تبدیل معکوس لاپلاس

$$\boxed{u = \frac{P_0 c(t - x/c)}{E} H(t - x/c)}$$

$H(t-t_0)$ تابع پله ای واحد Heaviside

$$H(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t < t_0 \\ 1 & \text{if} \quad t > t_0 \end{cases}$$

6 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

تبدیل سینوسی فوریه
$$\mathcal{F}_s f = F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$

تبدیل معکوس سینوسی فوریه
$$\mathcal{F}_s^{-1} F = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\sin(\omega t)d\omega$$

تبدیل کسینوسی فوریه
$$\mathcal{F}_c f = F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

تبدیل معکوس کسینوسی فوریه
$$\mathcal{F}_c^{-1} F = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\cos(\omega t)d\omega$$

7 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

روابط

$$\mathcal{F}_s f' = -\omega \mathcal{F}_c f$$

$$\mathcal{F}_s f'' = \omega f(0) - \omega^2 \mathcal{F}_s f$$

$$\mathcal{F}_c f' = f(0) + \omega \mathcal{F}_s f$$

$$\mathcal{F}_c f'' = -f'(0) - \omega^2 \mathcal{F}_c f$$

8 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

مثال   حل معادله پخش حرارت

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad \infty < x < \infty$$

$u(0,t) = A \qquad 0 < t < \infty$ شرایط مرزی

$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x < \infty$ شرایط اولیه

تبدیل سینوسی فوریه

$$\mathcal{F}_s u_t = a^2 \mathcal{F}_s u_{xx}$$

$$\mathcal{F}_s u_t = \int_0^\infty u_t(x,t)\sin(\omega x)dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty u(x,t)\sin(\omega x)dx$$

متغیری که حذف می شود

$$\mathcal{F}_s u_t = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_s u = \frac{d}{dt}U(t)$$

$$\mathcal{F}_s u_{xx} = \omega u(0,t) - \omega^2 \mathcal{F}_s u = \omega A - \omega^2 U(t)$$

BC

9 Dr. Hasan Ghasemzadeh

تبدیلات انتگرال

مثال

معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dU}{dt} = \alpha^2\left[\omega A - \omega^2 U(t)\right]$$

$IC \qquad \mathcal{F}_s u(x,0) = U(0) = 0$

تبدیل به معادله کامل با فاکتور انتگرال گیری

$$U = \frac{A}{\omega}\left[1 - e^{-\omega^2\alpha^2 t}\right]$$

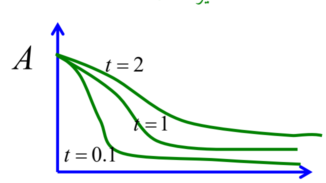
تبدیل معکوس

$$u(x,t) = \mathcal{F}_s^{-1}U = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{A}{\omega}\left[1 - e^{-\omega^2\alpha^2 t}\right]\sin(\omega x)d\omega$$

متغیرحذف شده

$$u(x,t) = \mathcal{F}_s^{-1}U = Aerfc\left(x/2\alpha\sqrt{t}\right)$$

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$



10 Dr. Hasan Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی

- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو

11 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

مساله اشترم لیویل

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx})+\big(q(x)+\lambda r(x)\big)y=0$$ **Sturm-Liouville equation**

p,q,r توابع حقیقی معلوم

λ مقدار ثابت

y تابع مجهول

$$Ly+\lambda r(x)y=0$$

$$L=\frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx})+q$$

اگر q,r پیوسته و p پیوسته و مشتق پذیر باشد معادله حتما جواب دارد

اگر p,r در بازه $[a,b]$ مثبت باشند معادله منظم نامیده می شود و بازای هر λ دو جواب مستقل خطی خواهد داشت

12 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

Sturm-Liouville system

$$Ly + \lambda r(x)y = 0 \qquad L = \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}) + q$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

λ مقدار ویژه است اگر سیستم مقابل جواب غیر صفر داشته باشد

در اینصورت جوابهای سیستم توابع ویژه نامیده می شوند

Periodic Sturm-Liouville system

$$Ly + \lambda r(x)y = 0$$

$$p(a) = p(b)$$
$$y(a) = y(b)$$
$$y'(a) = y'(b)$$

13 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

مثال

Sturm-Liouville system

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

شرایط مرزی

$\lambda \le 0 \Rightarrow$ مقدار ویژه نیست

$$\lambda > 0 \Rightarrow \quad y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ y'(\pi) = 0 & \Rightarrow B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4} \qquad n = 1,2,..$$ مقادیر ویژه

$$\sin\frac{2n-1}{2}x \qquad n = 1,2,..$$ توابع ویژه

14 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems

توابع متعامد

۱- حاصلضرب داخلی دو تابع حقیقی $f(x), g(x)$ در فاصله $a \le x \le b$
و با تابع وزنی $w(x)$ برابر است با

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

حاصلضرب داخلی استاندارد $w(x)=1$

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

۲- نورم تابع $f(x)$ در فاصله $a \le x \le b$

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f(x)^2 w(x)dx}$$

۳- اگر حاصلضرب در فاصله $(f,g)=0$ باشد توابع $f(x), g(x)$ در فاصله
$a \le x \le b$ و با تابع وزنی $w(x)$ متعامد نامیده می شوند

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx=0$$

توابع متعامد

15 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems

توابع متعامد

۴- مجموعه توابع $\{\varphi_n(x)\}_{n=0,1,2,...}$ یک مجموعه متعامد است اگر

$$\begin{cases} n \ne m \Rightarrow \\ n = m \Rightarrow \end{cases} \qquad \begin{cases} (\varphi_n,\varphi_m)=0 \\ (\varphi_n,\varphi_m)=\|\varphi_n\|^2 \ne 0 \end{cases}$$

مجموعه نرمال متعامد است اگر $\|\varphi_n\|^2=1$

۵- اگرمجموعه $\{\varphi_n(x)\}_{n=0,1,2,...}$ متعامد باشدمجموعه نرمال متعامد
مربوطه عبارتست از

$$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|}$$

16 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems

توابع متعامد

مثال مجموعه توابع $\{\sin(nx)\}_{n=0,1,2,...}$ در فاصله $(0,\pi)$ با تابع وزنی $w(x)=1$ یک مجموعه متعامد است

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx=\int_0^\pi \frac{1}{2}(-\cos(n+m)x+\cos(n-m)x)dx$$

$$=\frac{-1}{2}\frac{\sin(n+m)x}{(n+m)}\bigg|_0^\pi+\frac{1}{2}\frac{\sin(n-m)x}{(n-m)}\bigg|_0^\pi=0 \qquad n\neq m$$

$$\int_0^\pi \sin^2(nx)dx=\int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos(2nx))dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2n}\sin(2nx)\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2} \qquad n=m$$

مجموعه نرمال متعامد مربوطه عبارتست از

$$\psi_n(x)=\frac{\sin(nx)}{\|\varphi_n(x)\|}=\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\int_0^\pi \sin^2 x dx}}=\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi/2}}$$

17 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems

مقادیر ویژه

۶- یک عملگر دیفرانسیل L را نسبت به حاصلضرب داخلی خود الحاق گوییم هرگاه برای هر تابع مانند f,g در محدوده عملگر L داشته باشیم :

$$(Lf,g)=(f,Lg)$$ **Self adjoint**

قضایا

۱- یک عملگر دیفرانسیل خطی بصورت

$$L=\left[\frac{d}{dx}(P(x)\frac{d}{dx})+q(x)\right]$$

نسبت به حاصلضرب داخلی استاندارد روی فاصله (a,b) با شرایط مرزی تعریف شده به صورت زیر

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases}$$

خود الحاق می باشد

18 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

قضایا

۲- یک عملگر دیفرانسیل خطی بصورت $L=\frac{1}{r(x)}\left[\frac{d}{dx}(P(x)\frac{d}{dx})+q(x)\right]$

نسبت به حاصلضرب داخلی روی فاصله (a,b) با تابع وزنه $r(x)$ و با شرایط مرزی تعریف شده به صورت زیر

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases}$$

خود الحاق می باشد

19 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

قضایا

۳- هر عملگر دیفرانسیل خطی از مرتبه دوم را می توان بصورت خود الحاق نوشت

عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بصورت کلی

$$L=\left[a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)\right]$$

از قضیه قبل توابع مناسب را می یابیم

$$L=\frac{p(x)}{r(x)}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{r(x)}\frac{dp(x)}{dx}\frac{d}{dx}+\frac{q(x)}{r(x)}$$

$$\begin{cases}a_2(x)=\dfrac{p(x)}{r(x)}\\ a_1(x)=\dfrac{1}{r(x)}\dfrac{dp(x)}{dx}\\ a_0(x)=\dfrac{q(x)}{r(x)}\end{cases}$$

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=\frac{1}{p(x)}\frac{dp(x)}{dx}\Rightarrow\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx=\int\frac{1}{p(x)}\frac{dp(x)}{dx}dx=\ln p(x)+\overset{0}{c}$$

$$p(x)=\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\right)$$

$$r(x)=\frac{p(x)}{a_2(x)}$$

$$q(x)=a_0(x)r(x)$$

20 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

قضایا

۴- بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه مختلف یک عملگر خود الحاق ، متعامدند

فرض کنید λ_m, λ_n دو مقدار ویژه متفاوت ازعملگر خود الحاق L با بردارهای ویژه y_m, y_n باشد

$$\begin{cases} Ly_m = \lambda_m y_m \\ Ly_n = \lambda_n y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \quad (Ly_m, y_n) = (\lambda_m y_m, y_n) \\ 2 \quad (Ly_n, y_m) = (\lambda_n y_n, y_m) \end{cases} \Rightarrow (Ly_m, y_n) = (\lambda_m y_m, y_n) = (y_m, Ly_n) \quad 3$$

خود الحاق

2-3 $$(Ly_n, y_m) - (y_m, Ly_n) = (\lambda_n y_n, y_m) - (\lambda_m y_m, y_n) = \lambda_n (y_n, y_m) - \lambda_m (y_m, y_n)$$
$$= (\lambda_n - \lambda_m)(y_n, y_m) = 0$$

$$(\lambda_n \neq \lambda_m) \Rightarrow (y_n, y_m) = 0$$

21 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

قضایا

۵- مقادیر ویژه یک عملگر خود الحاق ،حقیقی هستند

$$Ly = \lambda_m y$$

$$(Ly, y) = (\lambda y, y) = \lambda (y, y) = \bar{\lambda} (y, y)$$

معادله و تمام ضرایب حقیقی هستند

بنابرین اگر λ مقدار ویژه آن باشد $\bar{\lambda}$ نیز مقدار ویژه آنست

$$\lambda (y, y) = \bar{\lambda} (y, y)$$

$$(\lambda - \bar{\lambda})(y, y) = 0$$

$$(y, y) \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

λ حقیقی است

قضایای فوق برای عملگر اشترم لیویل صادق است

22 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

مثال

Euler equation

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \qquad 1 \le x \le e$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(e) = 0 \end{cases}$$

$$L = \left[a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \right]$$

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\right) \Rightarrow p(x) = x$$

$$r(x) = \frac{p(x)}{a_2(x)} \Rightarrow r(x) = 1/x$$

$$q(x) = a_0(x) r(x) \Rightarrow q(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x}\lambda y = 0$$

Sturm-Liouville system

23 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Eigenvalue problems مقادیر ویژه

مثال

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x}\lambda y = 0$$

Sturm-Liouville system

$$y = c_1 x^{i\sqrt{\lambda}} + c_2 x^{-i\sqrt{\lambda}} \qquad x^{i\sqrt{\lambda}} = e^{i\sqrt{\lambda}\ln x} = \cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + i\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

$$y = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + Bi\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ y'(e) = 0 & \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_n = n^2\pi^2 \qquad n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

مقادیر ویژه

$$\Rightarrow \sin(n\pi \ln x) \qquad n = 1,2,\ldots$$

توابع ویژه

24 Dr. Hasan Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی

- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو