Partial Differential Equations (PDEs)

معادلات دیفرانسیل جزئی

Ghasemzadeh

فهرست عناوین و فصول

۱- معادلات دیفرانسیل جزئی
- یادآوری معادلات دیفرانسیل معمولی
- رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی
- معادلات نیمه خطی مرتبه اول
- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت
- خطوط مشخصه
- روش تفکیک متغیرها
- تبدیلات انتگرال
- مقادیر ویژه
- روش های عددی- تفاوت محدود
- روش مونت کارلو

2 Dr. Hasan Ghasemzadeh

Finite Difference Method

- Taylor expansion

$$y(x+\Delta x) = y(x) + (\Delta x) y'(x) + (\frac{\Delta x^2}{2!}) y''(x) + (\frac{\Delta x^3}{3!}) y''(x) + \ldots$$

- First approximation: Euler's method

$$y(x+\Delta x) = y(x) + (\Delta x) y'(x)$$

تقریب تفاضلی پیشرو

$$y'(x) = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

تقریب تفاضلی پسرو

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$y'(x) = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} y''(x)$$

- Each step the error is $O(\Delta x)$, so very small step size is needed.
- The errors can accumulate so rapidly that it becomes unstable.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

3

Finite Difference Method

$$y'(x) = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \qquad y'(x) = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

تقریب تفاضلی مرکزی

$$y'(x) = \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$y(x+\Delta x) = y(x) + (\Delta x) y'(x) + (\frac{\Delta x^2}{2!}) y''(x) + (\frac{\Delta x^3}{3!}) y'''(x) + (\frac{\Delta x^4}{4!}) y^{(4)}(x) + \ldots$$

$$y(x-\Delta x) = y(x) - (\Delta x) y'(x) + (\frac{\Delta x^2}{2!}) y''(x) - (\frac{\Delta x^3}{3!}) y'''(x) + (\frac{\Delta x^4}{4!}) y^{(4)}(x) + \ldots$$

$$y''(x) = \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{\Delta x^2} - (\frac{\Delta x^2}{12}) y^{(4)}(x) + \ldots$$

تقریب تفاضلی مرکزی مشتق دوم

$$y''(x) = \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

- *Error order* $O(\Delta x^2)$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

4

ODE Solution

مثال

ODE $y(x)'' - y(x) = 0$

BCs $\begin{cases} x=0 & y=0 \\ x=1 & y=1 \end{cases}$

$x=0$	$x=1/3$	$x=2/3$	$x=1$
x_0	x_1	x_2	x_3
y_0	y_1	y_2	y_3

$\Delta x = 1/3$

تقریب تفاضلی مرکزی مشتق دوم

$$y''(x) = \frac{y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1}}{\Delta x^2}$$

جایگذاری در معادله

$$y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1} - y_l \Delta x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} l=1 \quad & y_2 - (2+1/9)y_1 + y_0 = 0 \\ l=2 \quad & y_3 - (2+1/9)y_2 + y_1 = 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} y_2 - 19/9\, y_1 = 0 \\ 1 - 19/9\, y_2 + y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0.2893 \\ y_2 = 0.6107 \end{cases}$$

$$\Delta x = 1/6 \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0.2890 \\ y_2 = 0.6104 \end{cases}$$

5 Dr. Hasan Ghasemzadeh

ODE Solution

مثال

ODE $y(x)'' - y(x) = 0$

$$y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$$

$$\begin{cases} x=0 & y=0 \\ x=1 & y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow A = -B \\ Ae + B/e = 1 \Rightarrow 1 = B(1/e - e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{-e}{1-e^2} \\ B = \dfrac{e}{1-e^2} \end{cases} \quad y(x) = \frac{-e}{1-e^2}e^{x} + \frac{e}{1-e^2}e^{-x}$$

$$\begin{aligned} x &= 1/3 \\ x &= 2/3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0.2889 \\ y_2 = 0.6102 \end{cases}$$

$$\Delta x = 1/3 \quad \begin{cases} y_1 = 0.2893 \\ y_2 = 0.6107 \end{cases}$$

$$\Delta x = 1/6 \quad \begin{cases} y_1 = 0.2890 \\ y_2 = 0.6104 \end{cases}$$

6 Dr. Hasan Ghasemzadeh

شرایط مرزی

Dirichlet or Essential — شرایط دیرکله یا شرایط اساسی

Neumann or Natural — شرایط نیومن یا شرایط طبیعی

مثال

ODE $y(x)'' - y(x) = 0$

BCs $\begin{cases} x=0 & y=0 \\ x=1 & y'=1 \end{cases}$

$x=0$	$x=1/3$	$x=2/3$	$x=1$	$\Delta x = 1/3$
x_0	x_1	x_2	x_3	
y_0	y_1	y_2	y_3	

$$y_{l+1} - 2y_l + y_{l-1} - y_l \Delta x^2 = 0$$

$$\begin{cases} y_2 - 19/9\, y_1 = 0 \\ y_3 - 19/9\, y_2 + y_1 = 0 \end{cases}$$

$$y' = \frac{y_3 - y_2}{\Delta x} = \frac{y_3 - y_2}{1/3} = 1$$ تقریب تفاضلی پسرو

$$y_3 - y_2 = 1/3$$

$$\begin{cases} y_1 = 0.2477 \\ y_2 = 0.5229 \\ y_3 = 0.8563 \end{cases}$$

7 Dr. Hasan Ghasemzadeh

PDE Solution

Taylor expansion

$$u(x+\Delta x, y) = u(x_{l+1}, y_m) = u(x_l, y_m) + u_x(x_l, y_m)\Delta x + u_{xx}(x_l, y_m)\left(\frac{\Delta x^2}{2!}\right) + \dots$$

$$u(x-\Delta x, y) = u(x_{l-1}, y_m) = u(x_l, y_m) - u_x(x_l, y_m)\Delta x + u_{xx}(x_l, y_m)\left(\frac{\Delta x^2}{2!}\right) + \dots$$

$$u_x(x_l, y_m) = \frac{u(x_{l+1}, y_m) - u(x_l, y_m)}{\Delta x}$$ تقریب تفاضلی پیشرو

$$u_{xx}(x_l, y_m) = \frac{u(x_{l+1}, y_m) - 2u(x_l, y_m) + u(x_{l-1}, y_m)}{\Delta x^2}$$ تقریب تفاضلی مرکزی

$$u_y(x_l, y_m) = \frac{u(x_l, y_{m+1}) - u(x_l, y_m)}{\Delta y}$$

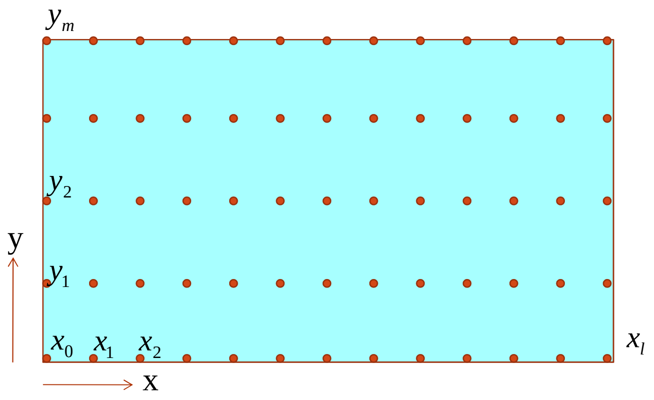
$$u_{yy}(x_l, y_m) = \frac{u(x_l, y_{m+1}) - 2u(x_l, y_m) + u(x_l, y_{m-1})}{\Delta y^2}$$

8 Dr. Hasan Ghasemzadeh

PDE Solution

روش حل مساله

شبکه بندی



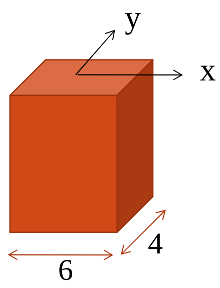
تعداد مجهولات $= (l-1)(m-1)$

به تعداد شرایط مرزی نیومن به تعداد مجهولات اضافه می شود

9 Dr. Hasan Ghasemzadeh

PDE Solution

مثال پیچشش در میله



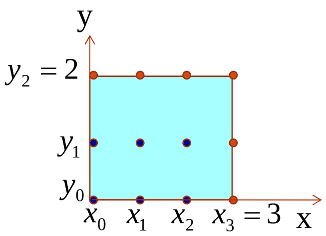
$$u_{xx} + u_{yy} = -2G\theta$$

u تنش که در سطوح مرزی صفر است

$$T = 2\iint_{\Omega} u\,dxdy$$ گشتاور

$$\tau = \frac{\partial u}{\partial n}$$ تنش برشی

n بردار نرمال بر سطح



فرض محاسبه $G\theta = 1$

جواب ها در $G\theta$ ضرب می شوند

10 Dr. Hasan Ghasemzadeh

PDE Solution

تقریب تفاضلی مرکزی

$$u_{xx}(x_l, y_m) = \frac{u(x_{l+1}, y_m) - 2u(x_l, y_m) + u(x_{l-1}, y_m)}{\Delta x^2}$$

$$u_{yy}(x_l, y_m) = \frac{u(x_l, y_{m+1}) - 2u(x_l, y_m) + u(x_l, y_{m-1})}{\Delta y^2}$$

جایگذاری در معادله با $\Delta x = \Delta y = 1$

$$u(x_{l+1}, y_m) + u(x_{l-1}, y_m) + u(x_l, y_{m+1}) + u(x_l, y_{m-1}) - 4u(x_l, y_m) = -2$$

$$l = 0,1,2 \qquad m = 0,1$$

در مرزها تنش صفر است پس شش مجهول داریم

با توجه به تقارن مساله هرجا اندیس منفی شود مقدار مثبت جایگزین می شود

$$l = 0 \qquad u(x_{l-1}, y_0) = u_{-1,0} = u_{1,0}$$

PDE Solution

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,0} \\ u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{0,1} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \begin{Bmatrix} 3.137 \\ 2.8866 \\ 1.9971 \\ 2.3873 \\ 2.2062 \\ 1.5508 \end{Bmatrix}$$

انتگرال گیری ذوزنقه $T = 2\iint_{\Omega} u\,dxdy = 65.41$

جواب تحلیلی $T = 76.4$

حداکثر شیب تابع با استفاده از تفاوت محدو د پیشرو در نقطه $u_{2,0}$ بدست می آید

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{\partial u}{\partial n} = 2.96$$

FDM

نکات

۱- در معادله پواسون با فرض $\Delta x = \Delta y$

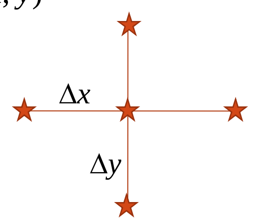
$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$$

$$u_{l+1,m}+u_{l-1,m}+u_{l,m+1}+u_{l,m-1}-4u_{l,m}=\Delta x^2 f(x,y)$$

جهت x $\xrightarrow{l}$ $\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u = \Delta x^2 f(x,y)$

$m \uparrow$

جهت y



در طرف دوم پاسخ نقطه تخمین زده میشود (روش ستاره یا استانسیل stencil)

FDM

نکات

۲- همگرایی برای معادلا ت بیضوی همواره وجود دارد: *CONVERGENCE*

اگر ابعاد شبکه به سمت صفر میل کند جواب به سمت جواب واقعی میل می کند

۳- همگرایی برای معادلا ت سهموی و هذلولوی تضمین شده نیست.

همگرایی شامل *CONSISTENCY*

اگر ابعاد شبکه به سمت صفر میل کند خطاهای ناشی از قطع شدن به سمت صفر میل کند

STABILITY

خطاهای کوچک در زمانهای اولیه در سایر زمانها نیز کوچک بماند

سهموی $u_t = u_{xx} \Rightarrow \Delta t \le 1/2\,\Delta x^2$

هذلولوی $u_{tt} = u_{xx} \Rightarrow \Delta t \le \Delta x$

FDM

نکات

۴-در ارضای شرایط همگرایی برای معادلا ت سهموی مقدار Δt گاهی خیلی کوچک می شود

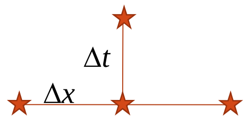
$$\Delta x = 0.1 \Rightarrow \Delta t \le 1/2\Delta x^2 = 0.005$$

برای کاهش زمان از روش کرانک نیکلسون استفاده می شود

$$u_t = u_{xx}$$

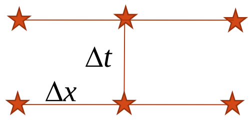
روش عادی

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{i,j+1}-u_{i,j}) = \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j})$$



کرانک نیکلسون

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{i,j+1}-u_{i,j}) = \frac{1}{2\Delta x^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}) + \frac{1}{2\Delta x^2}(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1})$$



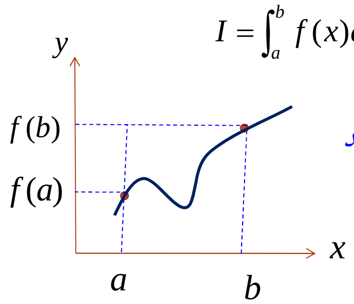
روش شش نقطه ای

فهرست عناوین و فصول

روش مونت کارلو

با یکسری بازی شانسی می توان یک مساله ریاضی را حل نمود

مثال: محاسبه انتگرال به روش مونت کارلو $I=\int_a^b f(x)dx$



یک بازی شانسی که اعداد اتفاقی در مستطیل ذیل می دهد

$$a<x<b \qquad 0<y<\max f(x)$$

اگر پس از n بار پرتاب تاس m بار جواب زیر منحنی f(x) داشته باشیم

$$I=\int_a^b f(x)dx=\frac{m}{n}A \qquad A=(b-a)\{\max f(x)\}$$

17 Dr. Hasan Ghasemzadeh

روش مونت کارلو

روش یافتن اعداد تصادفی

اعداد اتفاقی r_i $\qquad r_i\in[0,1]$

$$x_i=a+(b-a)r_i \quad\Rightarrow\quad x_i\in[a,b]$$

روش مانده ها برای تعیین اعداد اتفاقی r_i

$$r_{i+1}=\operatorname{Res}\left[\frac{Mr_i+K}{P}\right] \qquad r_i\in[0,P]$$

اعداد اتفاقی P,K,M $\qquad i=1,2,...$

مثال: $P=100, M=37, K=16 \qquad 0<r_0=15<100$

$$Mr_0+K=571\rightarrow r_1=71$$
$$Mr_1+K=2643\rightarrow r_2=43$$
$$Mr_2+K=1607\rightarrow r_3=7$$

$$0<r_i<100 \quad\Rightarrow 0<r_i/100<1$$

تذکر: اگر P به اندازه کافی بزرگ باشد مثل $P=2^{40}$

امکان ایجاد فرایند تکرار بسیار کم خواهد شد

$= [15,71,43,7,43,7,...]$

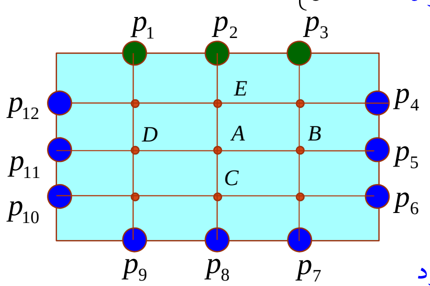
18 Dr. Hasan Ghasemzadeh

روش مونت کارلو

مثال: حل معادله دیفرانسیل به روش مونت کارلو

$$PDE: u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad 0<x,y<1$$

$$BC: u(x,y)=g(x,y)\begin{cases}1 & \text{مرز فوقانی}\\ 0 & \text{سایر مرزها}\end{cases}$$



حل: بازی تور دووینو

۱- دووینو از نقطه دلخواه مثل A شروع می کند.

۲- دووینو با احتمال مساوی به یکی از نقاط همسایه می رود

۳- با تکرار مرحله قبل دووینو به مرز می رسد نقطه مرزی ثبت شده و یک مسیر تصادفی تکمیل می شود

۴- مراحل ۲و۳ به اندازه کافی تکرار می شود

۵- دووینو جایزه g_i در نقطه p_i دریافت می کند . هدف بازی محاسبه جایزه متوسط بازای جمیع پیمایش هاست

$$R(A)=\sum_{i=1}^{12} g_i P_A(p_i)$$

$P_A(p_i)$ احتمال انجام یک بازی که از A شروع شود و به نقطه p_i ختم شود

19 Dr. Hasan Ghasemzadeh

روش مونت کارلو

$R(A)$ جواب تقریبی مساله در نقطه A می باشد

$$R(A)=\sum_{i=1}^{12} g_i P_A(p_i)$$

اگر بازی ازنقطه مرزی شروع شود دووینو جایزه g_i دریافت کرده که همان شرایط مرزی می باشد یعنی شرایط مرزی ارضا می شود

اگر بازی از نقطه ای درون ناحیه شروع شود مانند نقطه A با توجه به اینکه احتمال رفتن به نقا ط مجاور برابر می باشد

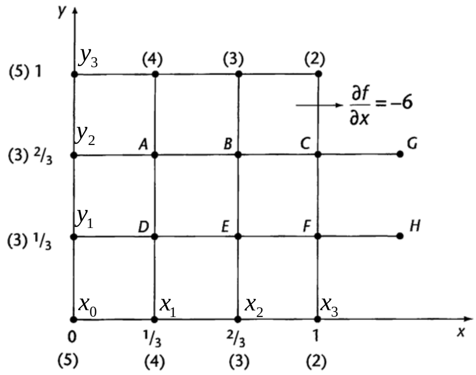
$$R(A)=\frac{1}{4}\big(R(B)+R(C)+R(D)+R(E)\big)$$

این معادله دقیقا معادله ایست که در روش تفاوت محدود داشتیم

$$u_{l+1,m}+u_{l-1,m}+u_{l,m+1}+u_{l,m-1}-4u_{l,m}=0 \quad \Rightarrow u_{l,m}=\frac{1}{4}\left(u_{l+1,m}+u_{l-1,m}+u_{l,m+1}+u_{l,m-1}\right)$$

تذکر: اگر احتمال رفتن به نقاط مجاور برابر نباشد باید در نظر گرفته شود

20 Dr. Hasan Ghasemzadeh



21 Dr. Hasan Ghasemzadeh