

روش های عددی در ژئومکانیک

Numerical Integration

انتگرال گیری عددی

Hasan Ghasemzadeh

<http://wp.kntu.ac.ir/ghasemzadeh>

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

انتگرال عددی

تبدیل محاسبه مقدار انتگرال به محاسبه یک سری

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong W_0 G(\xi_0) + W_1 G(\xi_1) + \dots + W_n G(\xi_n)$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong W_0 G(\xi_0, \eta_0) + W_1 G(\xi_1, \eta_1) + \dots + W_n G(\xi_n, \eta_n)$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \cong W_0 G(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + W_1 G(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + \dots + W_n G(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$$

انتگرال عددی

روش عددی می‌تواند برای انتگرال‌ها با استفاده از جملات سری مربوطه و ضرب نمودن آن در یک ضریب وزنه بدست آید.

روش حل عددی یک انتگرال تبدیل آن در ابتدا به سری و سپس محاسبه مجموعه تا حد مورد نیاز است

غالباً دامنه انتگرال‌های عددی در روش اجزاء محدود در فاصله از -1 تا $+1$ می‌باشد.

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong W_0 G(\xi_0) + W_1 G(\xi_1) + \dots + W_n G(\xi_n)$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong W_0 G(\xi_0, \eta_0) + W_1 G(\xi_1, \eta_1) + \dots + W_n G(\xi_n, \eta_n)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

3

در فضای یک بعدی نقاط نمونه $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ در نظر می‌شوند. تابع تقریب $F_n(\xi)$ یک چند جمله‌ای از درجه n در نظر گرفته می‌شود که و تقریباً برابر $G(\xi)$ در هر نقطه مبنا ξ است،

$$G(\xi) \approx F_n(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_n \xi^n$$

ضرایب مجهول را می‌توان از معادلات

زیر بدست آورد:

$$G(\xi_0) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \dots + \alpha_n \xi_0^n$$

$$G(\xi_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_1^n$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$G(\xi_n) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_n \xi_n^n$$

مقدار انتگرال بصورت زیر است:

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^{+1} F_n(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2\alpha_2}{3} + \dots + \frac{\alpha_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

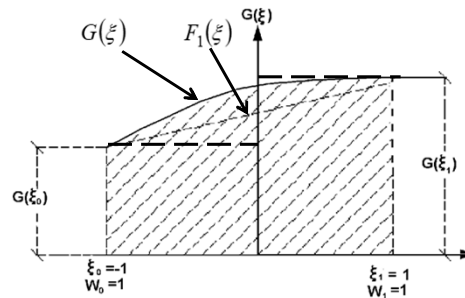
در صورتیکه مقادیر مجهول بدست آمده α_0 تا α_n در رابطه فوق قرار گیرند،

انتگرال عددی محاسبه شده است. Dr. Hasan Ghasemzadeh

تعداد جملات سری به گونه ای انتخاب می گردد که تعداد ضرایب مجهول α_0 تا α_n برابر تعداد نقاط مبنا که در آنها تابع $G(\xi)$ معلوم است باشد، تا بتوان معادلات را حل نمود.

برای مثال در شکل زیر در این حالت ساده قانون تقریب دوزنقه ای بکار گرفته شده است، بطوریکه $\xi_1 = 1, \xi_0 = -1$ است:

$$F_1(\xi) = \frac{G(\xi_1) + G(\xi_0)}{2} + \frac{G(\xi_1) - G(\xi_0)}{2} \xi \quad I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong \int_{-1}^{+1} F_1(\xi) d\xi = G(\xi_0) + G(\xi_1)$$



ضرایب وزنه و مقادیر در نقاط مبنا در تقریب دوزنقه ای

Dr. Hasan Ghasemzadeh

5

براساس این تقریب بین دو نقطه مبنا تغییرات تابع خطی در نظر گرفته شده و مقدار تابع در نقاط مبنا دقیقاً برابر مقادیر تابع $G(\xi)$ می باشند.

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong \int_{-1}^{+1} F_1(\xi) d\xi = G(\xi_0) + G(\xi_1)$$

رابطه فوق رابطه عمومی ارائه شده در شرایط $n = 1$ است.

در صورتیکه n عددی فرد باشد. در مورد چند جمله ای تا درجه n این روش با خطای بسیار کم جواب انتگرال را حاصل می نماید. در صورتیکه n زوج باشد، برای چند جمله ای تا درجه $n + 1$ جواب نسبتاً دقیق حاصل خواهد شد.

در صورتیکه فواصل نقاط مبنا مساوی در نظر گرفته شوند، این روش نیوتن - کوتس [Newton - Cotes] نامیده می شود.

این روش نیاز به حل n معادله n مجهول دارد.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

6

انتگرال عددی بروش گاوس

Gaussian – quadrature

در این روش تابع چند جمله تقریب از ه درجه آن p است

$$G(\xi) \approx F_p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_p \xi^p$$

پاسخ انتگرال در قالب سری عددی با ضرایب وزنه بشکل زیر نوشته می شود:

$$I = \int_{-1}^{+1} F_p(\xi) d\xi \approx W_0(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \alpha_2 \xi_0^2 + \dots + \alpha_p \xi_0^p) +$$

$$W_1(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_1^2 + \dots + \alpha_p \xi_1^p) + \dots + W_n(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \alpha_2 \xi_n^2 + \dots + \alpha_p \xi_n^p)$$

در حالیکه بصورت تحلیلی، رابطه ارائه شده $F_p(\xi)$ بصورت زیر محاسبه می شود:

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^{+1} F_n(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2\alpha_2}{3} + \dots + \frac{\alpha_p}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}]$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

7

با مقایسه ضرایب دوسری معادلات می توان نتیجه گرفت: $W_0 + W_1 + \dots + W_n = 2$

$$W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 + \dots + W_n \xi_n = 0$$

$$\vdots$$

$$W_0 \xi_0^p + W_1 \xi_1^p + \dots + W_n \xi_n^p = \frac{1}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}]$$

به این ترتیب $p + 1$ معادله برای بدست آوردن مقادیر $\{w_i, \xi_i, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ که مجهولات می باشند حاصل شده اند. از طرفی مسلم است تعداد معادلات بایستی برابر با تعداد مجهولات باشند. یعنی:

$$p + 1 = 2(n + 1)$$

از آنجائیکه n یک عدد صحیح است می توان گفت همیشه p یک عدد فرد خواهد بود. یعنی برای مثال:

تعداد نقاط مبنا	درجه چند جمله ای مورد استفاده
$(n + 1)$	(P)
1	1
2	3
3	5
4	7

Dr. Hasan Ghasemzadeh

8

در این روش با در اختیار گذاشتن تابع $F_p(\xi)$ از درجه P ، تعداد $n + 1$ مقدار مینا از تابع $G(\xi)$ مورد نیاز می‌باشند. در چنین حالتی کلیه مجهولات که شامل اطلاعات مربوط به موقعیت نقاط مینا و ضرایب وزنه می‌باشند حاصل خواهد گردید.

در صورتیکه $n = 0$ باشد. می‌توان نوشت:

$$p+1 = 2(n+1) \Rightarrow p = 1$$

$$F_p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi$$

$$\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_0 \xi_0 = 0 \end{cases}$$

مسلماً با در نظر گرفتن یک مقدار (یک نقطه مینا) بهترین جواب را در حالتی که نقطه در وسط محیط قرار گیرد بدست آورد. در این صورت انتگرال چند جمله‌ای درجه اول مطابق شکل محاسبه می‌شود. در این حالت $W_i = 2$ $\xi = 0$ است.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

9

در صورتیکه $n = 1$ باشد. می‌توان نوشت:

$$p+1 = 2(n+1) \Rightarrow p = 3$$

$$F_p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3$$

$$W_0 + W_1 = 2$$

$$W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 = 0$$

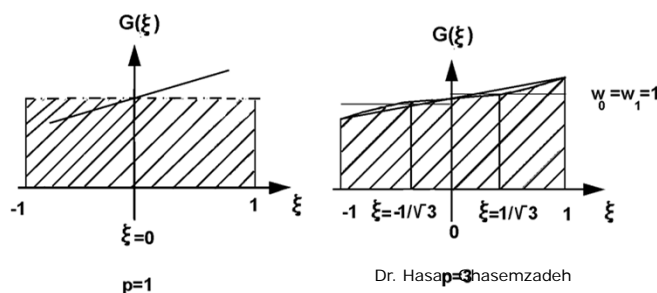
$$W_0 \xi_0^2 + W_1 \xi_1^2 = 2/3$$

$$W_0 \xi_0^3 + W_1 \xi_1^3 = 0$$

با حل سری معادله غیر خطی حاصل می‌توان جوابهای زیر را بدست آورد:

$$\xi_1 = -\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773502591$$

$$W_0 = W_1 = 1.0$$



به این ترتیب انتگرال به کمک چند جمله‌ای درجه ۳ مطابق شکل حاصل شده است.

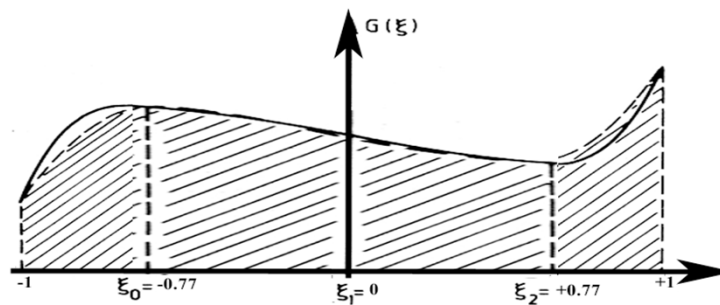
Dr. Hasan Ghasemzadeh

10

در صورتیکه $n = 2$ باشد، شش معادله در عملیات محاسبه ξ_i, W_i حاصل خواهد شد. جوابها در این حالت بصورت زیر میباشند:

$$\xi_0 = -\xi_2 = -\sqrt{0.6} = -0.7745966692, \quad \xi_1 = 0$$

$$W_0 = W_2 = \frac{5}{9}, \quad W_1 = \frac{8}{9}$$



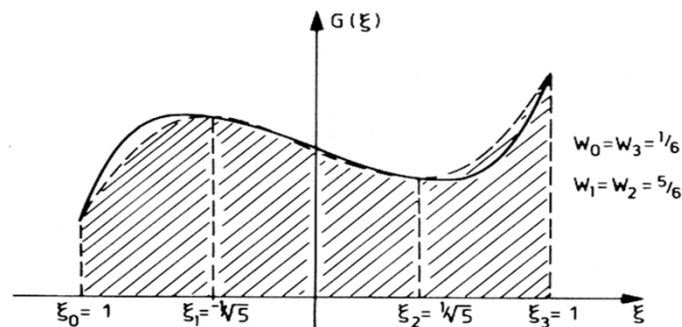
Dr. Hasan Ghasemzadeh

11

برای $n=3$ ، درجه $p=7$ ، و هشت معادله حاصل و نتیجه بشکل زیر است:

$$\xi_3 = -\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$W_0 = W_3 = \frac{1}{6}, \quad W_1 = W_2 = \frac{5}{6}$$



Dr. Hasan Ghasemzadeh

12

مثال : مقدار انتگرال زیر را با انتخاب یک و دو نقطه مبنا پیدا کنید:

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[3e^x + x^2 + \frac{1}{(x+2)} \right] dx$$

در صورتیکه $n = 0$ باشد:

$$w_1 = 2, \quad x_1 = 0 \Rightarrow I \approx 2f(0) = 7.0$$

در صورتیکه $n = 1$ باشد:

$$w_1 = w_2 = 1, \quad x_1 = -0.57735, \quad x_2 = 0.57735$$

$$I = 1 \times \left[3e^{-0.57735} + (-0.57735)^2 + \frac{1}{(-0.57735+2)} \right] + 1 \times \left[3e^{0.57735} + (0.57735)^2 + \frac{1}{(0.57735+2)} \right]$$

$$= 2.72039 + 6.06526 = 8.78565$$

مقدار دقیق انتگرال فوق بصورت زیر است: $I = 8.7857$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

13

مثال : مقدار انتگرال زیر را با انتخاب یک و دو نقطه مبنا پیدا کنید:

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[3e^x + x^2 + \frac{1}{(x+2)} \right] dx$$

در صورتیکه $n = 2$ باشد:

$$w_0 = w_2 = \frac{5}{9}, \quad w_1 = \frac{8}{9}, \quad x_0 = -x_2 = -\sqrt{0.6}, \quad x_1 = 0$$

$$I = \frac{5}{9} \times \left[3e^{-\sqrt{0.6}} + (-\sqrt{0.6})^2 + \frac{1}{(-\sqrt{0.6}+2)} \right] + \frac{8}{9} \times 3.5 + \frac{5}{9} \times \left[3e^{\sqrt{0.6}} + (\sqrt{0.6})^2 + \frac{1}{(\sqrt{0.6}+2)} \right] = 1.5548 + 3.11111 + 4.1498 = 8.8157$$

در صورتیکه $n = 3$ باشد:

$$w_0 = w_3 = \frac{1}{6}, \quad w_1 = w_2 = \frac{5}{6}, \quad \xi_3 = -\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$I = \frac{1}{6} \times \left[3e^{-1} + (-1)^2 + \frac{1}{(-1+2)} \right] + 3e^1 + (1)^2 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{5}{6} \times \left[3e^{-\sqrt{1/5}} + (-\sqrt{1/5})^2 + \frac{1}{(-\sqrt{1/5}+2)} \right] + 3e^{\sqrt{1/5}} + (\sqrt{1/5})^2 + \frac{1}{(\sqrt{1/5}+2)}$$

$$= 8.8176$$

مقدار دقیق انتگرال فوق بصورت زیر است:

$$I = 8.7857$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

14

Table 7.9 Gauss-Legendre Abscissas and Weights

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^N w_{N,k} f(x_{N,k}) + E_N(f)$$

N	Abscissas, $x_{N,k}$	Weights, $w_{N,k}$	Truncation error, $E_N(f)$
2	-0.5773502692 0.5773502692	1.0000000000 1.0000000000	$\frac{f^{(4)}(c)}{135}$
3	± 0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888888	$\frac{f^{(6)}(c)}{15,750}$
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549	$\frac{f^{(8)}(c)}{3,472,875}$
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888	$\frac{f^{(10)}(c)}{1,237,732,650}$
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346	$\frac{f^{(12)}(c)2^{13}(6!)^4}{(12!)^3 13!}$
7	± 0.9491079123 ± 0.7415311856 ± 0.4058451514 0.0000000000	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837	$\frac{f^{(14)}(c)2^{15}(7!)^4}{(14!)^3 15!}$
8	± 0.9602898565 ± 0.7966664774 ± 0.5255324099 ± 0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626827834	$\frac{f^{(16)}(c)2^{17}(8!)^4}{(16!)^3 17!}$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

15

انتگرال عددی در حالت دو و سه بعدی

در حالت دو بعدی مسأله منجر به محاسبه یک انتگرال با تابع دو متغیره خواهد شد. یعنی:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

در صورتیکه دامنه انتگرال یک مستطیل باشد، به سادگی می توان روش حل را به حالت مسأله یک بعدی در دو جهت متعامد تعمیم داده و در دو جهت ξ, η بطور مستقل مسأله در پیش برد. بنابراین در حالت

عمومی می توان نوشت:

$$\int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi \approx \sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta)$$

با منظور نمودن تغییرات مسأله در جهت ξ و ثابت ماندن تغییرات در جهت

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta) \right] d\eta \approx \sum_{i=0}^n \left[W_i \sum_{j=0}^n W_j G(\xi_i, \eta_j) \right]$$

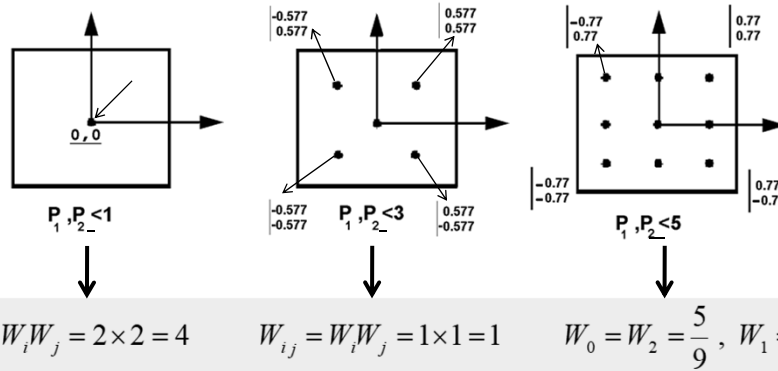
می توان نوشت:

$$I \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \bar{W}_{ij} G(\xi_i, \eta_j), \quad \bar{W}_{ij} = W_i W_j$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

16

بدین ترتیب اگر موقعیت نقاط مبنا به صورت (ξ_i, η_j) نشان داده شوند، موقعیت دقیق آنها براساس روش انتخاب شده مشخص می گردند. در صورتیکه چند جمله ای بکار گرفته شده در دو بعد به ترتیب از درجات P_1, P_2 باشند، می توان انتگرالها را با جملات کلی $\xi_{P_1} \eta_{P_2}$ ، در صورتیکه $P_1, P_2 \leq P$ هستند، مورد محاسبه قرار داد. با کاربرد روش گوس برای اجزاء دو بعدی بصورت شکل نتایج نشان داده شده بدست می آیند.



Dr. Hasan Ghasemzadeh

$\bar{W}_0 = W_i W_j, \bar{W}_{00} = 25/81$

17

Order	Fig.	Error	Points	Triangular Co-ordinates	Weights
Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadratic		$R = O(h^3)$	a, b, c	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0$ $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$
Cubic		$R = O(h^4)$	a, b, c, d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $0.6, 0.2, 0.2$ $0.2, 0.6, 0.2$ $0.2, 0.2, 0.6$	$-\frac{27}{256}$ $\frac{27}{256}$
Quintic		$R = O(h^6)$	a, b, c, d, e, f, g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.22500, 0.0000 0.13239, 41.527 0.12593, 9.1805

جزء مثلث با یک نقطه گاوس:
 جزء مثلث با سه نقطه گاوس:
 جزء مثلث با چهار نقطه گاوس:
 جزء مثلث با هفت نقطه گاوس:

with
 $\alpha_1 = 0.0597158717$
 $\beta_1 = 0.4701420641$
 $\alpha_2 = 0.79374269832$
 $\beta_2 = 0.1012865073$

جزء مثلث:

در حالت دو بعدی جهت محاسبه انتگرالها بر روی سطح جزء مثلث از جدول زیر می توان استفاده کرد.

مختصات و ضرایب برای انتگرال عددی مثلث در تعداد مختلف نقاط مبنا

18

اجزاء سه بعدی:
 در حالت سه بعدی جهت محاسبه انتگرالها بر روی محیط هرم
 چهاروجهی در فضای سه بعدی بصورت $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ زیر حاصل
 می گردد:

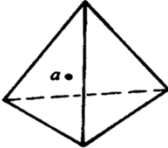
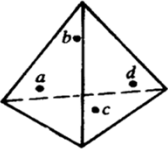
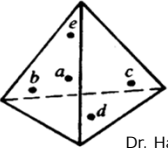
$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \bar{W}_{ijk} G(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

$$\bar{W}_{ijk} = W_i W_j W_k$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

19

مختصات و ضرایب انتگرال عددی چهار وجهی (هرم چهارپهلوی)
 در تعداد مختلف نقاط مبنا

No.	Order	Fig.	Error	Points	Tetrahedral Co-ordinates	Weights
1	Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1
2	Quadratic		$R = O(h^3)$	a, b, c, d	$\alpha, \beta, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \beta, \alpha, \beta$ $\beta, \beta, \beta, \alpha$ $\alpha = 0.58541020$ $\beta = 0.13819660$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
3	Cubic		$R = O(h^4)$	a, b, c, d, e	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$-\frac{4}{20}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{9}{20}$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

20

Dr. Hasan Ghasemzadeh

21

انتگرال گیری عددی

- ◆ The mapping approach requires us to be able to evaluate the integrations within the domain (-1...1) of the functions shown.
- ◆ Integration can be done analytically by using closed-form formulas from a table of integrals (Nah..)
 - Or numerical integration can be performed
- ◆ Gauss quadrature is the more common form of numerical integration - better suited for numerical analysis and finite element method.
- ◆ It evaluated the integral of a function as a sum of a finite number of terms

$$I = \int_{-1}^1 \phi d\xi \quad \text{becomes} \quad I \approx \sum_{i=1}^n W_i \phi_i$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

22

انتگرال گیری عددی

- ◆ W_i is the 'weight' and ϕ_i is the value of $f(\xi=i)$

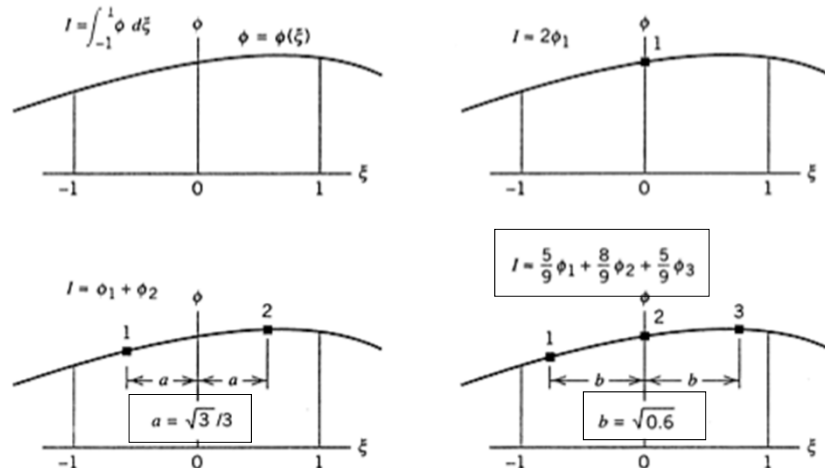


Fig. 4.5-1. Integration of a function $\phi = \phi(\xi)$ in one dimension by Gauss quadrature of orders 1, 2, and 3. Gauss points are $\xi = \pm \sqrt{3}/3$ and $\xi = 0$.

23

انتگرال گیری عددی - به روش گاوس کوادریچر

- ◆ If $\phi = \phi(\xi)$ is a polynomial function, then n-point Gauss quadrature yields the exact integral if ϕ is of degree $2n-1$ or less.
 - The form $\phi = c_1 + c_2\xi$ is integrated exactly by the one point rule
 - The form $\phi = c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2$ is integrated exactly by the two point rule
 - And so on...
 - Use of an excessive number of points (more than that required) still yields the exact result
- ◆ If ϕ is not a polynomial, Gauss quadrature yields an approximate result.
 - Accuracy improves as more Gauss points are used.
 - Convergence toward the exact result may not be monotonic

Dr. Hasan Ghasemzadeh

24

انتگرال گیری عددی - به روش گاوس کوادریچر - دوبعدی

- ◆ In two dimensions, integration is over a quadrilateral and a Gauss rule of order n uses n² points

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m W_i W_j \phi(\xi_i, \eta_j) \quad (4.5-2)$$

- ◆ Where, $W_i W_j$ is the product of one-dimensional weights. Usually $m=n$.
 - If $m = n = 1$, ϕ is evaluated at ξ and $\eta=0$ and $I=4\phi_1$
 - For Gauss rule of order 2 - need $2^2=4$ points
 - For Gauss rule of order 3 - need $3^2=9$ points

Dr. Hasan Ghasemzadeh

25

انتگرال گیری عددی - به روش گاوس کوادریچر - دوبعدی

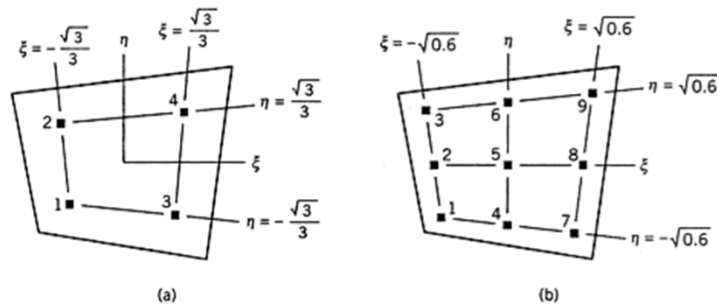


Fig. 4.5-2. Gauss point locations for integration of a function $\phi = \phi(\xi, \eta)$ in two dimensions, using orders 2 and 3. (Reprinted from [2.2] by permission of John Wiley & Sons, Inc.)

$$I \approx \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \quad \text{for rule of order} = 2$$

$$I \approx \frac{25}{81}(\phi_1 + \phi_3 + \phi_7 + \phi_9) + \frac{40}{81}(\phi_2 + \phi_4 + \phi_6 + \phi_8) + \frac{64}{81}\phi_5$$

26

تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی

- ◆ All the isoparametric solid elements are integrated numerically. Two schemes are offered: "full" integration and "reduced" integration.
 - For the second-order elements Gauss integration is always used because it is efficient and it is especially suited to the polynomial product interpolations used in these elements.
 - For the first-order elements the single-point reduced-integration scheme is based on the "uniform strain formulation": the strains are not obtained at the first-order Gauss point but are obtained as the (analytically calculated) average strain over the element volume.
 - The uniform strain method, first published by Flanagan and Belytschko (1981), ensures that the first-order reduced-integration elements pass the patch test and attain the accuracy when elements are skewed.
 - Alternatively, the "centroidal strain formulation," which uses 1-point Gauss integration to obtain the strains at the element center, is also available for the 8-node brick elements in ABAQUS/Explicit for improved computational efficiency.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

27

تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی

The differences between the uniform strain formulation and the centroidal strain formulation can be shown as follows: ◆

For the 8-node brick elements the interpolation function given above can be rewritten as

$$\mathbf{u} = N^I(g, h, r) \mathbf{u}^I \text{ sum on } I.$$

The isoparametric shape functions N^I can be written as

$$N^I(g, h, r) = \frac{1}{8} \Sigma^I + \frac{1}{4} g \Lambda_1^I + \frac{1}{4} h \Lambda_2^I + \frac{1}{4} r \Lambda_3^I + \frac{1}{2} hr \Gamma_1^I + \frac{1}{2} gr \Gamma_2^I + \frac{1}{2} gh \Gamma_3^I + \frac{1}{2} ghr \Gamma_4^I,$$

where

$$\Sigma^I = [+1, +1, +1, +1, +1, +1, +1, +1],$$

$$\Lambda_1^I = [-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1],$$

$$\Lambda_2^I = [-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1],$$

$$\Lambda_3^I = [-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1],$$

$$\Gamma_1^I = [+1, +1, -1, -1, -1, -1, +1, +1],$$

$$\Gamma_2^I = [+1, -1, -1, +1, -1, +1, +1, -1],$$

$$\Gamma_3^I = [+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1],$$

$$\Gamma_4^I = [-1, +1, -1, +1, +1, -1, +1, -1],$$

and the superscript I denotes the node of the element. The last four vectors, Γ_α^I (α has a range of four), are the hourglass base vectors, which are the deformation modes associated with the energy of the 1-point integration element but resulting in a non-constant strain field in the element.

تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی

In the uniform strain formulation the gradient matrix B^I is defined by integrating over the element as

$$B_i^I = \frac{1}{V_{e\ell}} \int_{V_{e\ell}} N_i^I(g, h, r) dV_{e\ell},$$

$$N_i^I(g, h, r) = \frac{\partial N^I}{\partial x_i},$$

where $V_{e\ell}$ is the element volume and i has a range of three.

In the centroidal strain formulation the gradient matrix B^I is simply given as

$$B_i^I = N_i^I(0, 0, 0),$$

which has the following antisymmetric property:

$$B_1^1 = -B_1^7,$$

$$B_1^3 = -B_1^5,$$

$$B_1^2 = -B_1^8,$$

$$B_1^4 = -B_1^6.$$

It can be seen from the above that the centroidal strain formulation reduces the amount of effort required to compute

Dr. Hasan Ghasemzadeh

29

تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی

- ◆ Numerical integration is simpler than analytical, but it is not exact. $[k]$ is only approximately integrated regardless of the number of integration points
 - Should we use fewer integration points for quick computation
 - Or more integration points to improve the accuracy of calculations.
 - Hmm....

Dr. Hasan Ghasemzadeh

30

کاهش تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی و لزوم کاهش آن

- ◆ A FE model is usually inexact, and usually it errs by being too stiff. Overstiffness is usually made worse by using more Gauss points to integrate element stiffness matrices because additional points capture more higher order terms in [k]
- ◆ These terms resist some deformation modes that lower order terms do not and therefore act to stiffen an element.
- ◆ On the other hand, use of too few Gauss points produces an even worse situation known as: instability, spurious singular mode, mechanics, zero-energy, or hourglass mode.
 - Instability occurs if one of more deformation modes happen to display zero strain at all Gauss points.
 - If Gauss points sense no strain under a certain deformation mode, the resulting [k] will have no resistance to that deformation mode.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

31

کاهش تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی و لزوم کاهش آن

- ◆ Reduced integration usually means that an integration scheme one order less than the full scheme is used to integrate the element's internal forces and stiffness.
 - Superficially this appears to be a poor approximation, but it has proved to offer significant advantages.
 - For second-order elements in which the isoparametric coordinate lines remain orthogonal in the physical space, the reduced-integration points have the Barlow point property (Barlow, 1976): the strains are calculated from the interpolation functions with higher accuracy at these points than anywhere else in the element.
 - For first-order elements the uniform strain method yields the exact average strain over the element volume. Not only is this important with respect to the values available for output, it is also significant when the constitutive model is **nonlinear**, since the strains passed into the constitutive routines are a better representation of the actual strains.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

32

کاهش تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی و لزوم کاهش آن

- ◆ کاهش نقاط مبنا از وابستگی های درونی جزء (اثر فشارناپذیری یا برش کیرشف دربرش اجزاء خمشی) می کاهد.
- ◆ در این گونه اجزاء، انتگرالگیری کاملتر موجب پیدایش پدیده قفل شدگی و سختی زیادی در جزء و نتایج دور از واقعیت گردیده که با کاهش تعداد نقاط مبنا نتایج منطقی تر و حجم محاسبات کمتر خواهند بود.
- ◆ این حالات بصورت پیدایش مودهای تغییر شکل ابن الوقت (hourglass modes) است که نیاز به کنترل خاص خواهد داشت.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

33

کاهش تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی و لزوم کاهش آن

- ◆ The reduced-integration second-order serendipity interpolation elements in two dimensions—the 8-node quadrilaterals—have one such mode, but it is benign because it cannot propagate in a mesh with more than one element.
- ◆ The second-order three-dimensional elements with reduced integration have modes that can propagate in a single stack of elements. Because these modes rarely cause trouble in the second-order elements, no special techniques are used in ABAQUS to control them.
- ◆ In contrast, when reduced integration is used in the first-order elements (the 4-node quadrilateral and the 8-node brick), hourglassing can often make the elements unusable unless it is controlled.
- ◆ In ABAQUS the artificial stiffness method given in Flanagan and Belytschko (1981) is used to control the hourglass modes in these elements.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

34

کاهش تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی و لزوم کاهش آن

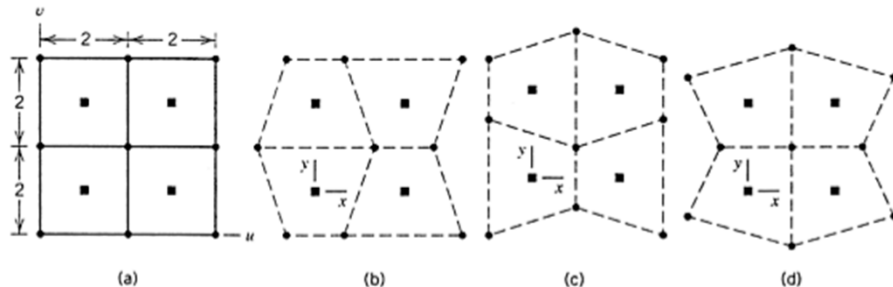


Fig. 4.6-1. (a) Undeformed plane 2 by 2 four-node square elements. Gauss points are shown by solid squares. (b,c,d) "Instability" displacement modes. (Reprinted from [2.2] by permission of John Wiley & Sons, Inc.)

three instabilities shown have the respective forms (b) $u = cxy$, $v = 0$; (c) $u = 0$, $v = -cxy$; and (d) $u = cy(1 - x)$, $v = cx(y - 1)$. We easily check that each of these displacement fields produces strains $\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ at the Gauss point, $x = y = 0$. Nonrectangular ele-

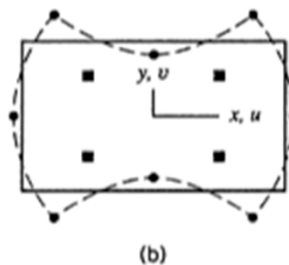
The FE model will have no resistance to loads that activate these modes. The stiffness matrix will be singular.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

35

کاهش تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی و لزوم کاهش آن

- ◆ Hourglass mode for 8-node element with reduced integration to four points



- ◆ This mode is typically non-communicable and will not occur in a set of elements.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

36

کاهش تعداد نقاط مبنا در انتگرال گیری عددی و لزوم کاهش آن

- ◆ The hourglass control methods of Flanagan and Belytschko (1981) are generally successful for linear and mildly nonlinear problems but may break down in strongly nonlinear problems and, therefore, may not yield reasonable results.
- ◆ Success in controlling hourglassing also depends on the loads applied to the structure. For example, a point load is much more likely to trigger hourglassing than a distributed load.
- ◆ Hourglassing can be particularly troublesome in eigenvalue extraction problems: the low stiffness of the hourglass modes may create many unrealistic modes with low eigenfrequencies.
- ◆ Experience suggests that the reduced-integration, second-order isoparametric elements are the most cost-effective elements in ABAQUS for problems in which the solution can be expected to be smooth.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

37