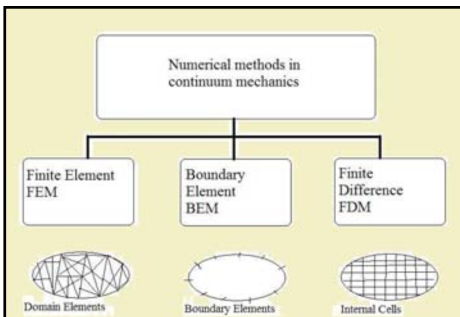
روش های عددی در ژئومکانیک

Boundary Element Method (BEM)

معرفی روش المان مرزی

Hasan Ghasemzadeh
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
http://wp.kntu.ac.ir/ghasemzadeh



روش اجزای مرزی

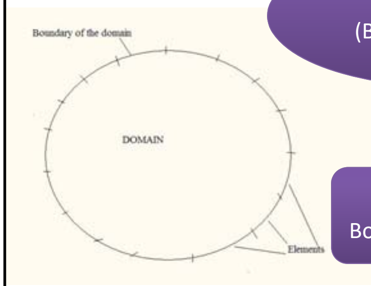
روشهای دامنه
(Domain Methods)

اجزای محدود
Finite Element

تفاضل محدود
Finite Difference

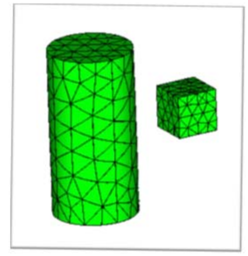
روشهای دامنه مسائل را به اجزاء و یا سلولهائی تقسیم میکند.

معادلاتی که در این مسائل صدق میکند را به صورتی تخمین میزنند که شرایط مرزی را به صورت جزئی و یا کامل ارضاء میکند.



روشهای مرزی
(Boundary Methods)

اجزای مرزی
Boundary Element M.



این روشها مرز مسائل را به اجزائی تقسیم میکنند.

معادلاتی که در این روش برای تخمین استفاده میشود به صورتیست که معادلات حاکم بر دامنه را ارضاء میکنند. نه مثل حالت قبل که بر شرایط مرزی حاکم باشد.

پیشرفت این روشها نسبت به روشهای دامنه کندتر بوده است.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 3

مقایسه روشهای مختلف عددی

روش تفاضل محدود

روش اجزای محدود

روش اجزای مرزی

مزایا :

جذاب ترین مشخصه این روش، سادگی آن در اجراست که دیگر روشها فاقد آن هستند

در دینامیک سیالات، این روش دارای مزایای زیادی نسبت به دیگر روشهاست.

معایب : شبکه بندی مستطیلی به سادگی انجام می شود لذا مسائل با هندسه پیچیده را به سختی مدل میکند. استفاده از این روش بسیار زمان بر میباشد. مخصوصاً برای مسائل پیچیده.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 4

مقایسه روشهای مختلف عددی

روش تفاضل محدود

روش اجزای محدود

روش اجزای مرزی

مزایا :

برای حالات غیر خطی روش مناسبی است (مخصوصاً نسبت به روش اجزای مرزی)

این روش به سادگی مسائل به شکلهای پیچیده را مدل میکند.

روشی بسیار قدرتمند و جا افتاده میان روشهای دیگر عددی میباشد.

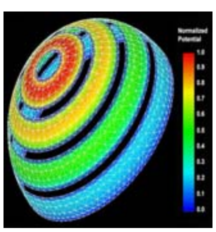
معایب :

به علت اینکه تمامی دامنه را بایستی مش بندی کند، زمان محاسبات و مکان لازم برای ذخیره داده ها و زمان لازم برای دسته بندی داده ها توسط کاربر زیاد است

Dr. Hasan Ghasemzadeh 5

اجزای مرزی
Boundary Element M.

مزایای روش اجزای مرزی:



المان بندی در یک بعد کمتر از روشهای دامنه

- **زمان کمتر برای پردازش داده ها**
- **تغییرات راحت در تغییر مش بندی**
- **مناسب برای مسایلی که نیاز به شبکه بندی مجدد دارند**

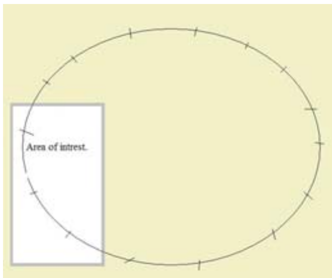
دقت زیاد

- **تنشها دقیق هستند در داخل دامنه تقریب نداریم**
- **مناسب برای مسایلی که تنش به سرعت عوض می شود**

Dr. Hasan Ghasemzadeh 6

اجزای مرزی
Boundary Element M.

مزایای روش اجزای مرزی:



زمان و حافظه کمتر برای رایانه

– برای میزان دقت مشابه روش اجزای مرزی تعداد نقاط و المانهای کمتری نسبت به روشهای دامنه نیاز دارد

حذف اطلاعاتی که نیاز نیست

- نقاط داخل دامنه اختیاری هستند
- بر روی قسمتی از دامنه می توان تمرکز نمود
- کاهش بیشتر زمان اجرا در رایانه

Dr. Hasan Ghasemzadeh 7

مقایسه روشهای مختلف عددی

روش اجزای مرزی | روش اجزای محدود | روش تفاضل محدود

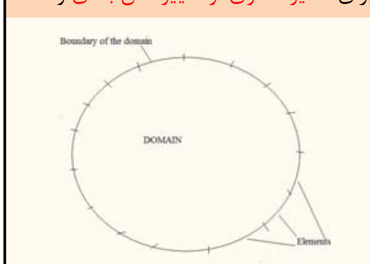
مزایا :

به دلیل مش بندی در مرزهای دامنه ها زمان محاسبات، مکان لازم برای ذخیره سازی، و تغییر مش بندی و زمان لازم برای کاربر به منظور مرتب سازی داده ها کاهش می یابد.

دارای کاربرد زیاد در قسمتهای تمرکز تنش داریم میباشد

مناسب برای مسائل با نسبت سطح به حجم کم

مناسب برای مناطق الاستیک خطی



معایب :

کاربرد کم در مسائل غیر خطی و غیر همگن مگر با به کاربردن تمهیداتی بدست آوردن تابع گرین و یا حل بنیادی مسئله

جوان بودن این روش و کاربرد کمتر در میان دانشمندان و محققین

زمان محاسبات و مکان لازم برای ذخیره داده ها نسبت مسقیم با توان دوی اندازه مسئله دارد

Dr. Hasan Ghasemzadeh 8

مقایسه روشهای مختلف عددی

روش اجزای مرزی

مسائلی که دارای دامنه نامحدود و یا بسیار بزرگ میباشد. میتوان در این مسائل دامنه را به چندین قسمت تقسیم کنیم و هر یک از این قسمتها را توسط روشهای اجزای مرزی بررسی کنیم.

در قسمتهائی که تمرکز تنش وجود دارد این روش نسبت به روشهای دامنه جواب دقیقتری میدهد. که البته این دقت به میزان زیادی به تابع تخمینی انتخابی بستگی دارد.

از ترکیب این دو روشهای "دامنه" و "مرزی" میتوان به روشهای بسیار مناسبی برای برخی مسائل مختلف دست یافت.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 9

Motivation

Laplace`s equation $\nabla^2 u(x) = 0 \quad \text{in } \Omega \ (x \in \Omega)$

with boundary conditions

Essential $u(x) = \bar{u}(x) \quad \text{in } \Gamma_1 \ (x \in \Gamma_1)$ Dirichlet type

Natural $q(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = \bar{q}(x) \ \text{in } \Gamma_2 \ (x \in \Gamma_2)$ Neumann type

Method of Weighted Residuals $\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w \; d\Omega = 0$

Green`s Theorem $\iiint_V \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \; dV = -\iiint_V u \Delta v \; dV + \iint_S u \operatorname{grad} v \; dS$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 10

Classification of Approximate Methods

- Original statement

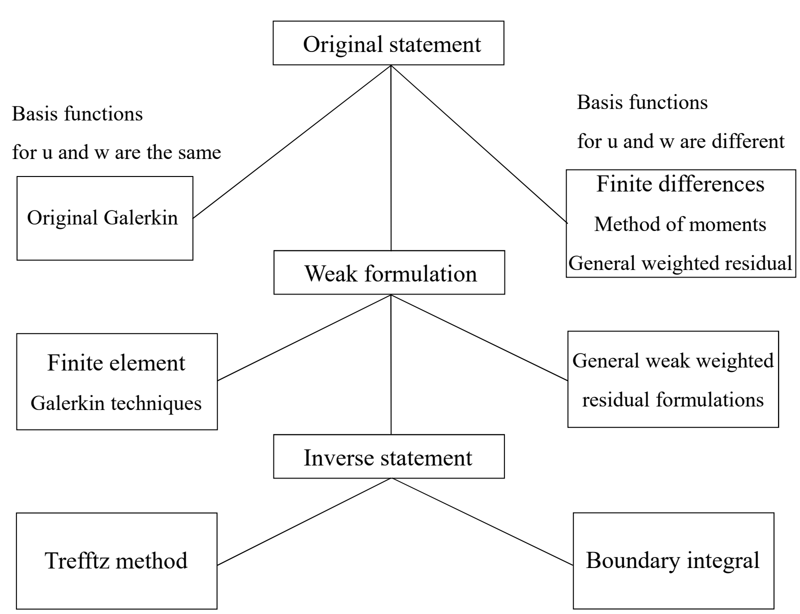
$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w \; d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w \; d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) w \; d\Gamma$$

- Weak statement

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} \; d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} w \; d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q w \; d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} \; d\Gamma$$

- Inverse statement

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u \; d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} w \; d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w \; d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} \; d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} \; d\Gamma$$



روش اجزای مرزی
(Boundary Element M.)

روش مستقیم
Direct Method

روش غیر مستقیم
Indirect Method

یکی از تفاوتهای شاخص در این دو روش، در انتخاب "روابط باقی مانده وزنی (Weighted Residual) میباشد. روش باقی مانده را پیش از این در روشهای دامنه (روش اجزای محدود) دیده ایم

روش مستقیم بر پایه اصل گرین بنا شده است.

روش مستقیم یک حالت کلی تر از روش غیر مستقیم است به صورتیکه روش غیر مستقیم روشی ساده تر نسبت به روش مستقیم میباشد.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 13

روش غیر مستقیم
Indirect Method

ساده ترین روش اجزای مرزی است.

این روش توسط راه حلهائی که معادلات حاکم در دامنه را ارضاء میکند، شروع میگردد که این معادلات حاکم در دامنه دارای تعدادی ضریب مجهول میباشد.
این ضرایب مجهول توسط اعمال شرایط مرزی در تعدادی نقطه و یا قسمت مجهول، محاسبه میشوند.

این روش نقصهائی دارد و روشی کامل و پخته نیست، اما در بسیاری موارد عملی دارای جوابی با دقت کافی است. مخصوصا زمانیکه راه حل استفاده شده، همان حل بنیادی (Fundamental Solution) از معادلات حاکم باشد.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 14

روش اجزای مرزی
(Boundary Element M.)

کجا از روش اجزای مرزی استفاده کنیم؟

جایی که حل اساسی برای مساله وجود دارد نظیر مسایل پتانسیل دوبعدی با معادله حاکم لاپلاس

-جریان سیال، پیچش میله، پخش و توزیع حرارت، میدانهای الکترومغناطیس

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$\nabla^2 = \nabla.\nabla =$ Laplacian operator

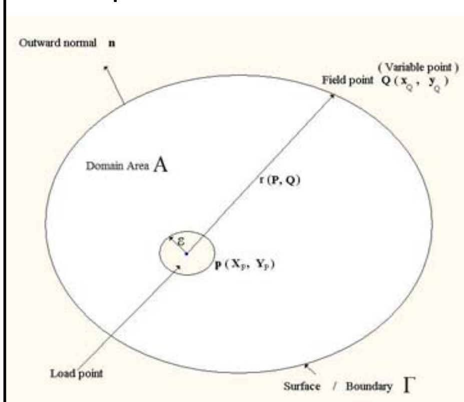
$\phi =$ Potential function

$x, y =$ Cartesian coordinate axis

Dr. Hasan Ghasemzadeh 15

روش اجزای مرزی
(Boundary Element M.)

Description of the domain



$$\nabla^2\lambda = \delta(Q-P)$$

Fundamental solution of the 2D Laplace equation for a concentrated source point at p is

$$\lambda(p,Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\left[\frac{1}{r(p,Q)}\right]$$

Where

$$r(p,Q) = \sqrt{\left((X_p - x_Q)^2 + (Y_p - y_Q)^2\right)}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 16

The 2D potential problem

Mapping of higher to lower dimensions

- Boundary of any domain is of a dimension 1 less than of the domain.
- In BEM the problem is moved from within the domain to its boundary.
- This means you must, in this case, map Area to Line.
- The well known 'Greens Second Identity' is used to do this.

$$\int_A \left(\phi\nabla^2\lambda - \lambda\nabla^2\phi\right)dA = \int_\Gamma \left(\phi\frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)d\Gamma$$

ϕ,λ have continuous 1st and 2nd derivatives.

ϕ unknown potential at any point.

λ known fundamental solution at any point.

n unit outward normal. $\frac{\partial}{\partial n}$ derivative in the direction of normal.

17

Dr. Hasan Ghasemzadeh

The 2D potential problem

Satisfying the Laplace equation

The unknown ϕ will satisfy $\nabla^2\phi = 0$ everywhere in the solution domain.

The known fundamental solution λ satisfies $\nabla^2\lambda = 0$ everywhere except the point p where it is singular.

$$\lambda(p,Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\left[\frac{1}{r(p,Q)}\right]$$

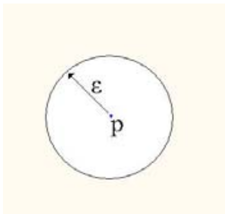
$$r(p,Q) = \sqrt{\left(\left(X_p - x_Q\right)^2 + \left(Y_p - y_Q\right)^2\right)}$$

18

Dr. Hasan Ghasemzadeh

The 2D potential problem

How to deal with the singularity



- Surround p with a small circle of radius ε , then examine solution as $\varepsilon \rightarrow 0$
- New area is $(A - A_\varepsilon)$
- New boundary is $(\Gamma + \Gamma_\varepsilon)$

$$\int_{A-A\varepsilon} \left(\phi \nabla^2 \lambda - \lambda \nabla^2 \phi\right) dA = \int_{\Gamma+\Gamma\varepsilon} \left(\phi \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) d\Gamma$$

Within area $(A - A\varepsilon)$ $\nabla^2 \phi = 0$ & $\nabla^2 \lambda = 0$

The left hand side of the equation is now 0 and the right is now …

19

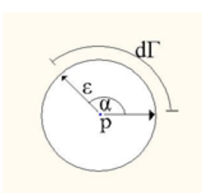
Dr. Hasan Ghasemzadeh

The 2D potential problem

How to deal with the singularity

$$0 = \int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) d\Gamma + \int_{\Gamma\varepsilon} \left(\phi \frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) d\Gamma$$

The second term must be evaluated and to do this let $d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\alpha$



And use the fact that $\frac{\partial \lambda}{\partial n} = \frac{\partial \lambda}{\partial r} . \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{2\pi r}$

20

Dr. Hasan Ghasemzadeh

The 2D potential problem

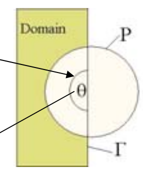
How to deal with the singularity

$$\int_{\Gamma\varepsilon}\left(\phi\frac{\partial\lambda}{\partial n}-\lambda\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)d\Gamma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\phi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]\varepsilon d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}(2\pi\phi)=1.\phi$$

$$C(P)=\begin{cases}1\\1/2\\0\end{cases}$$

Evaluated with p in the domain,
on the boundary (Smooth surface),
and outside the boundary.



$$C(P)=\frac{\theta}{2\pi}$$ For coarse surfaces

21

Dr. Hasan Ghasemzadeh

The 2D potential problem

The boundary integral equation

$$C(P)\phi(P)=\int_\Gamma K_2(P,Q)\frac{\partial\phi}{\partial n}\,d\Gamma(Q)-\int_\Gamma K_1(P,Q)\phi(Q)\,d\Gamma(Q)$$

Where K1 and K2 are the known fundamental solutions and are equal to

$$K_1(P,Q)=\frac{\partial\lambda(P,Q)}{\partial n}$$

$$K_2(P,Q)=\lambda(P,Q)$$

$$C(P)=\frac{\theta}{2\pi}$$

22

Dr. Hasan Ghasemzadeh

The 2D potential problem

- BEM can be applied where any potential problem is governed by a differential equation that satisfies the Laplace equation.

In this case the 2D form.

- A potential problem can be mapped from higher to lower dimension using Green's second identity.
- Shown how to deal with the case of the singularity point.
- Derived the boundary integral equation (BIE)

$$C(P)\phi(P) = \int_{\Gamma} K_2(P,Q)\frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} K_1(P,Q)\phi(Q)\, d\Gamma(Q)$$

23

Dr. Hasan Ghasemzadeh

Numerical Implementation

- Dirichlet, Neumann and mixed case.
- Discretisation
- Reduction to a form Ax=B

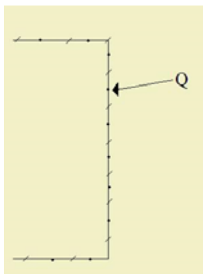
Dr. Hasan Ghasemzadeh 24

Numerical Implementation

Dirichlet, Neumann and mixed case.

$$C(P)\phi(P) = \int_{\Gamma} K_2(P,Q)\frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} K_1(P,Q)\phi(Q)\, d\Gamma(Q)$$

The unknowns of the above are values on the boundary and are $\phi, \dfrac{\partial \phi}{\partial n}$



Dirichlet Problem

ϕ is given every point Q on the boundary.

Neumann Problem

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$ is given every point Q on the boundary.

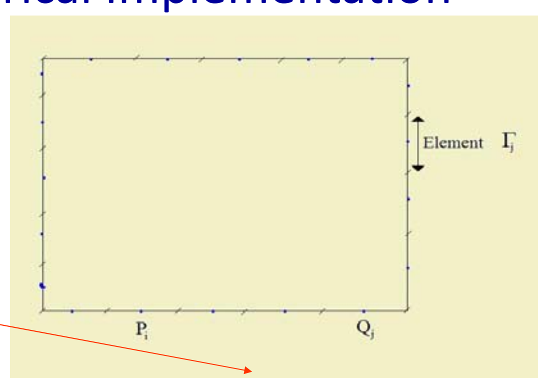
Mixed case – Either are given at point Q

25

Dr. Hasan Ghasemzadeh

Numerical Implementation

Discretisation



Unknowns

$$\frac{1}{2}\phi(P_i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \phi(Q_j)}{\partial n} \int_{\Gamma_j} K_2(P_i,Q_j)d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{N} \phi(Q_j) \int_{\Gamma_j} K_1(P_i,Q_j)d\Gamma_j$$

26

Dr. Hasan Ghasemzadeh

Numerical Implementation

Discretisation

Let $K_{1ij} = \int_{\Gamma_j} K_1(P_i, Q_j)\,d\Gamma_j \qquad K_{2ij} = \int_{\Gamma_j} K_2(P_i, Q_j)\,d\Gamma_j$

Unknowns

$$\tfrac{1}{2}\phi(P_i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \phi(Q_j)}{\partial n} K_{2ij} - \sum_{j=1}^{N} \phi(Q_j) K_{1ij}$$

27

Dr. Hasan Ghasemzadeh

Numerical Implementation

$$\phi(P_i) = \phi(Q_j) \quad when \quad i = j$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(K_{1ij} + \tfrac{1}{2}\delta_{ij}\right)\phi(Q_j) = \sum_{j=1}^{N} K_{2ij} \frac{\partial \phi(Q_j)}{\partial n}$$

$$\boldsymbol{HU} = \boldsymbol{GQ}$$

28

Dr. Hasan Ghasemzadeh

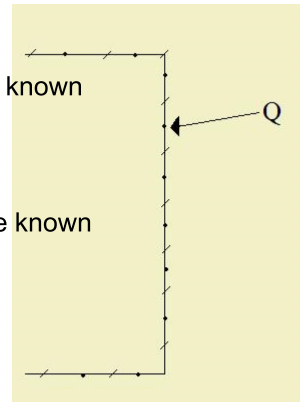
Numerical Implementation

Neumann Problem

$\mathbf{HU} = c$ Matrix A and vector C are known

Dirichlet Problem

$c = \mathbf{GQ}$ Matrix B and vector C are known



Mixed case

$\boldsymbol{HU} = \boldsymbol{GQ}$ Unknowns and knowns can be separated in to same form as above

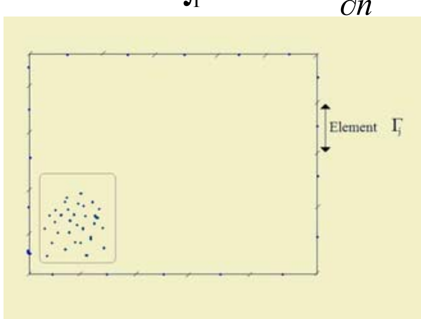
29

Dr. Hasan Ghasemzadeh

Numerical Implementation

As each point p in the domain is expressed in terms of the boundary values, once all boundary values are known ANY potential value within the domain can now be found.

$$C(P)\phi(P) = \int_{\Gamma} K_2(P,Q)\frac{\partial \phi}{\partial n}\,d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} K_1(P,Q)\phi(Q)\,d\Gamma(Q)$$



Dr. Hasan Ghasemzadeh 30

معادله انتگرالی
Integral Equation

معادله ای که توابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر میشوند

رابطه ای نزدیک بین معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیلی وجود دارد

ساده ترین شکل معادله انتگرال معادله فردهلم میباشد

معادله انتگرالی ولترا
$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

معادله انتگرالی فرد هلم
$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

توابع معلوم $\alpha(x), f(x), k(x,t)$ تابع مجهول $\varphi(x) = ?$

توابع گرین
Green Functions

تعریف

مسئله‌ی مقدار مرزی خطی معمولی

$$Lu(x) = \begin{cases} f(x) & a < x < b \\ 0 & x < a \ or \ x > b \end{cases}$$

$$u_i(u) = \gamma_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$

که در آن L اپراتور دیفرانسیلی معمولی، خطی و بدون ضرایب ثابت است و u_i شرایط مرزی غیر همگن است. تابع گرین $g(x|\xi)$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$Lg(x|\xi) = \delta(x-\xi)$$

$$u_i(g) = 0 \qquad i = 1,2,\dots,n$$

تابع گرین $g(x|\xi)$ جواب معادله در نقطه‌ی $x = \xi$ با ارضای شرایط مرزی همگن است

جرج گرین ۱۸۳۰

توابع گرین
Green Functions

تابع گرین، $g(x, s)$، که برای اپراتور دیفرانسیلی خطی L=L(x) میباشد درقسمتی از زیر مجموعه فضای اقلیدسی R^nدر نقطه $x=\xi$، در رابطه زیر بایستی صدق کند

$$Lg(x|\xi)=\delta(x-\xi)$$

که در آن δ تابع دیراک است. از این مشخصه تابع گرین میتوان برای حل معادلات دیفرانسیلی به صورت زیر استفاده کرد

$$Lu(x)=f(x)$$

که u(x) مجهول است

پس از کمی ساده سازی معادله اول داریم که

$$u(x)=\int g(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

از این انتگرال می توان برای پیدا کردن u(x) استفاده کرد. در این رابطه، f(x) معلوم است؛ اگر تابع گرین g(x,s) مشخص باشد u(x)بدست می آید. به این دلیل گاهی تابع گرین را حل بنیادی اپراتور L مینامند.

نکته حائز اهمیت این است که تمامی اپراتورها دارای تابع گرین نیستند و در برخی از آنها حساب کردن تابع گرین دارای مشکلات زیادی است. از این روی استفاده از این روش برای حل این مسائل دارای مشکلات زیادی است.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 33

حل بنیادی در روش اجزای مرزی
Fundamental Solution

حل بنیادی f، حلی است برای معادله غیرهمگن، بر حسب تابع دیراک $Lf = \delta(x)$

ابتدا یک حل بنیادی برای معادله مورد نظر می یابیم و سپس اقدام به یافتن پاسخ معادله اولیه توسط حل بنیادی میکنیم

مثالی از حلهای بنیادی

معادله لاپلاس

$$\nabla^2\phi=0$$

$$\nabla^2\varphi(p,Q)=\delta(p,Q)$$

$$\nabla^2\varphi(x,\xi)=\delta(x,\xi)$$

$$g(x,\xi)=\lambda(p,Q)_{2D}=\frac{1}{2\pi}\ln\left[\frac{1}{r(p,Q)}\right]$$

$$g(x,\xi)=\lambda(p,Q)_{3D}=\frac{1}{4\pi r(p,Q)}=\frac{1}{4\pi|x-\xi|}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 34

B.E.M	F.E.M
وارد کردن داده ها	وارد کردن داده ها
محاسبه ماتریسهای المان مرتبط با مقادیر مجهول مرزی u و q	محاسبه ماتریسهای المان
معرفی شرایط مرزی برای u و q	جمع بندی سیستم معادلات نهائی
حل سیستم معادلات برای مقادیر مرزی u و q	معرفی شرایط مرزی اساسی
محاسبه شار در نقاط انتخاب شده داخلی	حل سیستم معادلات برای بدست آوردن u
نمایش نتایج	بدست آوردن شار در هر المان
	نمایش نتایج

در روش اجزای مرزی نه تنها که تعداد مراحل اصلی کمتر از روش اجزای محدود میباشد، بلکه داده های ورودی نیز به مراتب ساده تر میباشند.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 35

روش اجزای مرزی

تابع پتانسیلی (u) را در نظر بگیرید که در دامنه مورد نظر بخواهیم در معادله روبرو صدق کند:

Laplace`s equation $\nabla^2 u(x) = 0 \quad \text{in} \;\; \Omega \;\; (x \in \Omega)$

with boundary conditions

Essential $u(x) = \overline{u}(x) \quad \text{in} \;\; \Gamma_1 \;\; (x \in \Gamma_1)$ Dirichlet type

Natural $q(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = \overline{q}(x) \;\; \text{in} \;\; \Gamma_2 \;\; (x \in \Gamma_2)$ Neumann type

حال تابع وزنه ای تعریف میکنیم (u^*) که مشتق اول آن در دامنه پیوسته باشد و در معادله که در بالا آورده شده است، صدق کند.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 36

روش اجزای مرزی

حال عبارت تابع وزنه را به صورت زیر مینویسیم که در آن q مشتق تابع پتانسیل u به n میباشد:

$$\int_{\Omega}(\nabla^2 u)u^*\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_2}(q-\overline{q})u^*\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1}(u-\overline{u})q^*\,\mathrm{d}\Gamma$$

پس از ساده سازی به معادله زیر میرسیم که در اصل این معادله نقطه شروع روش اجزای مرزی است.

$$\int_{\Omega}\nabla^2 u^*(\xi,x)u(x)\ \ d\Omega(x) = -\int_{\Gamma_2}\overline{q}(x)u^*(\xi,x)\ \ d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_1}q(x)u^*(\xi,x)\ \ d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_2}u(x)\frac{\partial u^*(\xi,x)}{\partial n}\ \ d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_1}\overline{u}(x)\frac{\partial u^*(\xi,x)}{\partial n}\ \ d\Gamma(x)$$

روش اجزای مرزی – حل بنیادی (Fundamental Solution)

در این قسمت ما میخواهیم توسط روش حل بنیادی به تابعی دست پیدا کنیم که در تابع اولیه ما، که همان معادله لاپلاس بوده، صدق کند. یعنی میخواهیم تابع u را بدست آوریم.

در صورتیکه که نیروی متمرکزی در نقطه i أثر کند، معادله حاکم به صورت روبرو میشود:

$$\nabla^2 u^*(\xi,x) = -\Delta(\xi,x)$$

Note: $\int_{\Omega} u(x)\Delta(\xi,x)\ \ d\Omega = u(\xi)$

where u^* is the fundamental solution

به حل معادله بالا، حل بنیادی گفته میشود. همانطور که در صفحه قبل نیز نشان داده شده است، این تابع دارای خاصیتی است که در معادله زیر نیز صدق میکند:

$$\int_{\Omega} u(\nabla^2 u^* + \Delta^i)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} u\nabla^2 u^*\mathrm{d}\Omega + u^i$$

u^i در معادله بالا، مقدار تابع u در نقطه اعمال نیروست

روش اجزای مرزی – حل بنیادی (Fundamental Solution)

پس از ساده سازی به معادله زیر دست میابیم که در تمامی دامنه این معادله صادق است.

$$u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* \, d\Gamma$$

BEM formulation

برای محیط سه بعدی ایزوتروپ حل معادله بالا که همان حل بنیادی است به صورت زیر میباشد:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r}$$

برای محیط دوبعدی ایزوتروپ حل بنیادی به صورت زیر میباشد:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 39

روش اجزای مرزی – معادلات در مرزها

$$u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* \, d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* \, d\Gamma$$

میخواهیم معادله بالا را که در تمامی دامنه صادق است، به صورتی تبدیل کنیم که مناسب برای روش اجزای مرزی باشد. به این معنی که در مرزها صادق باشد.

با ساده سازی و محاسبات سمت راست معادله بالا صفحه میبینیم که :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{\partial u^*}{\partial n} \, d\Gamma \right\} = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \, d\Gamma \right\} \qquad \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} q \frac{1}{4\pi\epsilon} \, d\Gamma \right\} = 0$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \{-\tfrac{1}{2} u\} = -\tfrac{1}{2} u$$

see also page 58

پس معادله به شکل زیر تبدیل میشود:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(\xi, x) \; d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) u^*(\xi, x) \; d\Gamma(x)$$

Boundary integral equation

$$c(\xi) = 1/2$$

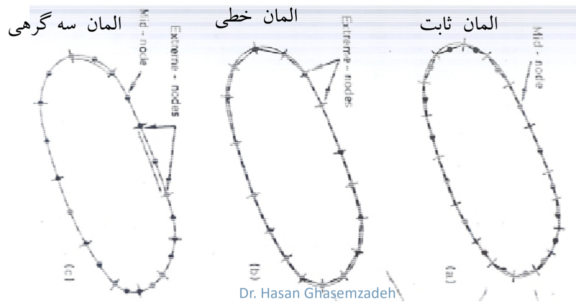
Dr. Hasan Ghasemzadeh 40

روش اجزای مرزی

$$\tfrac{1}{2}u^i + \int_\Gamma uq^*\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma qu^*\mathrm{d}\Gamma$$

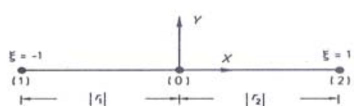
حال معادله ای که بدان رسیدیم، معادله ایست که در مرزها حاکم میباشد.

یک دامنه دو بعدی را در نظر بگیرید. به سه شکل که در زیر نشان داده شده است، میتوان مرزهای این دامنه را تقسیم بندی کرد:



روش اجزای مرزی – حالت اول شبکه بندی به صورت ثابت

برای اولین حالت یعنی المان ثابت داریم



در این حالت، مرز را به n شبکه تبدیل کردیم، که n1 تا از شبکه ها برای فضای u و n2 شبکه مربوط به q میباشد. مقادیر u و q فرض شده است که در هر قسمت ثابت باشد. با فرضیات زیر معادله ما به صورت زیر میشود.

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} u \; q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} u^* q \; d\Gamma \qquad \text{or} \quad c_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right\} u_j = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} q_j$$

با نامگذاری جدید به معادله زیر میرسیم:

$$\hat{H} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \;, \quad G = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$$

حل اساسی روی گره i ام اثر می کند

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j$$

روش اجزای مرزی – حالت اول شبکه بندی به صورت ثابت

پس از نوشتن معادله قبل برای هر n شبکه موجود و ساده سازی به معادله زیر میرسیم:

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij}u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}q_j \qquad \begin{aligned} H_{ij} &= \hat{H}_{ij} && for \quad i \neq j \\ H_{ij} &= \hat{H}_{ij} + c_i && for \quad i = j \end{aligned}$$

فرم ماتریسی آن به صورت زیر میباشد:

$$\boldsymbol{HU} = \boldsymbol{GQ}$$

$$\mathbf{A}X = F$$

Note: matrix $\boldsymbol{A}$ is nonsymmetric

توسط این معادله، ما میتوانیم با داشتن u و q مقدار u را میتوان در هر نقطه در دامنه بدست آورد.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 43

روش اجزای مرزی – حالت اول شبکه بندی به صورت ثابت

مقادیر توابع

مقدار تابع H در خود نقطه برابر صفر است زیرا دبی بر مماس بر منحنی عمود است

$$\hat{H}_{ii} = \int_{\Gamma_j} q * d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u *}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = 0$$

$$\Rightarrow H_{ii} = \hat{H}_{ii} + c_i = 1/2$$

$$G^{ii} = \int_{\Gamma_j} u * d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{2\pi}\ln(\frac{1}{r})d\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \ln(\frac{1}{\xi l/2})d\xi = \frac{l}{2\pi}\left(\ln(\frac{1}{l/2}) + 1\right) \qquad r = \xi l/2$$

المانهای غیرقطری را با استفاده از انتگرال گیری عددی برای مثال گوس چهار نقطه ای می توانید محاسبه کنید

$$G^{ij} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2}$$

$$H^{ij} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} -\frac{1}{(r)_k^2} \times dist \times w_k \times \frac{L}{2}$$

w_k ضرایب وزنه گوس

$dist$ فاصله عمودی نقطه وسط هر المان مرزی تا المان مرزی مورد محاسبه

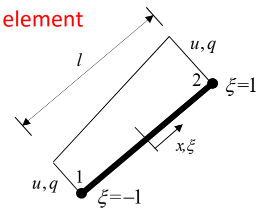
در فصل دوم کتاب بربیا زیر برنامه ای در این خصوص ارایه شده است POCONBE

Dr. Hasan Ghasemzadeh 44

روش اجزای مرزی – حالت دوم شبکه بندی به صورت خطی

حالت دوم به این صورت است که تغییرات u و q را به صورت خطی در هر شبکه در نظر بگیریم.

•Linear element



در این صورت مقادیر u و q بر حسب مختصات محلی تغییر میکند و با توجه به مقادیر شکل به صورت زیر نشان داده میشوند.

$$u(\xi)=\varphi_1 u_1+\varphi_2 u_2=[\varphi_1\ \ \varphi_2]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\varphi^T u^n$$

$$q(\xi)=\varphi_1 q_1+\varphi_2 q_2=[\varphi_1\ \ \varphi_2]\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\end{Bmatrix}=\varphi^T q^n$$

$$\varphi_1=\frac{1}{2}(1-\xi),\qquad \varphi_2=\frac{1}{2}(1+\xi)$$

- Bilinear element
- Quadratic element
- Cubic element

Dr. Hasan Ghasemzadeh 45

روش اجزای مرزی – حالت دوم شبکه بندی به صورت خطی

در انتها پس از ساده سازیها مشابه با حالت اول به معادله زیر میرسیم

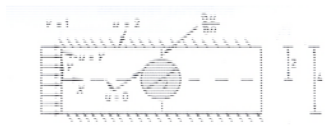
$$c^i u^i+[\hat{H}_{i1}\ \hat{H}_{i2}\ldots\hat{H}_{in}]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\u_n\end{Bmatrix}=[G_{i1}\ G_{i2}\ldots G_{in}]\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\q_n\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{HU}=\boldsymbol{GQ}$$

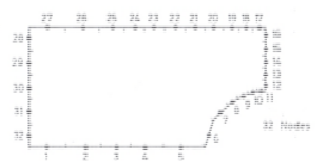
Dr. Hasan Ghasemzadeh 46

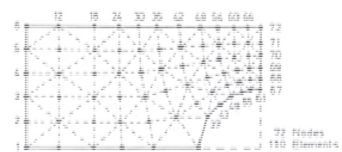
مقایسه نتایج روشهای اجزای محدود و مرزی در مثال

در یک محفظه که سیلندری در آن مطابق شکل زیر قرار دارد، سیالی جریان دارد. در این مثال تابع u نمایشگر خطوط جریان میباشد و q برابر با سرعت جریان است.



به دلیل تقارن تنها ربع سازه را در نظر میگیرم. در صورتیکه از روش اجزای محدود استفاده کنیم، بایستی آن را به ۱۱۰ قسمت توسط ۷۲ گره تبدیل کنیم. اما در صورت استفاده از روش اجزای مرزی با دقتی مشابه، آن را به ۳۲ المان تقسیم میکنیم.

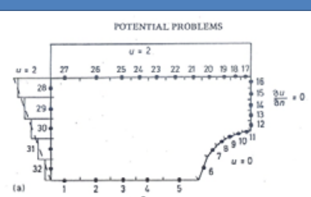




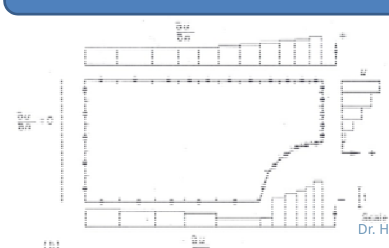
Dr. Hasan Ghasemzadeh 47

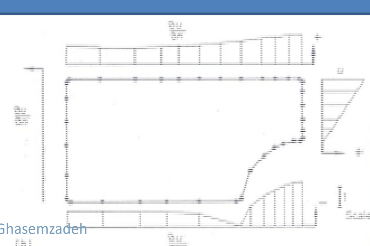
مقایسه نتایج روشهای اجزای محدود و مرزی در مثال

مقادیر u و q در مرزها به صورتی است که در شکل زیر نشان داده شده است.



نتایج اجزای مرزی با فرض در نظر گرفتن حالت اول و دوم (تغییرات ثابت و خطی u و q) به صورت زیر میباشد:

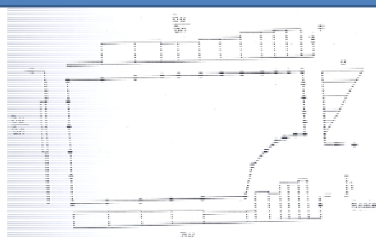




Dr. Hasan Ghasemzadeh 48

مقایسه نتایج روشهای اجزای محدود و مرزی در مثال

همان پارامترها توسط روش اجزای محدود که حساب شده اند به صورت زیر میباشند:



مشاهده میکنیم که :

- نتایج روش اجزای مرزی حالت دو (تغییرات خطی در هر المان) دقیقتر از نتایج حالت اول است.

-مقدار u در داخل دامنه در روش اجزای مرزی خیلی نزدیک به روش اجزای محدود میباشد.

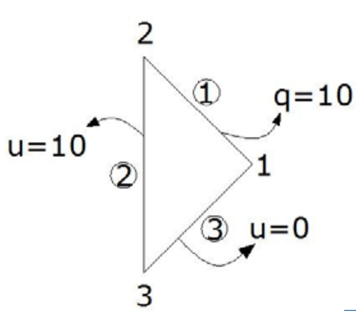
-مقادیر q یا همان مشتق اول u در مرزها در روش اجزای محدود راضی کننده نمیباشد و روش اجزای مرزی نتایج بهتری داده است.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 49

مثال

در زیر مثالی بسیار ساده که توسط روش اجزای مرزی اجرا شده است آورده شده است:

یک محیط به صورت مثلث را در نظر بگیرید که شرایط مرزی آن به صورت شکل روبرو تعریف شده است:



المان ها به صورت مقابل در نظر گرفته می شود

مختصات گره ها به صورت زیر میباشد:

Y	X	شماره گره
1	1	1
2	0	2
0	0	3

$$HU = GQ$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 50

مثال

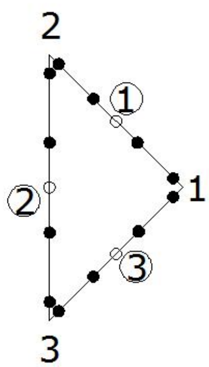
حل:

محاسبه مختصات نقاط گوس

$$a_x = \frac{x_1 - x_2}{2} \quad b_x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$a_y = \frac{y_1 - y_2}{2} \quad b_y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\rightarrow \quad x_{co} = a_x \times k_i + b_x$$
$$y_{co} = a_y \times k_i + b_y$$
$$r = \sqrt{(x_p - x_{co})^2 + (y_p - y_{co})^2}$$

با در نظر گرفتن روش گوس چهارنقطه ای ضرایب وزنه و نقاط گوس برابر هستند با:



$$w(1) = 0.347854 \Rightarrow k_1 = 0.861136 \quad w(2) = 0.347854 \Rightarrow k_2 = -0.861136$$
$$w(3) = 0.652145 \Rightarrow k_3 = 0.339981 \quad w(4) = 0.65214 \Rightarrow k_4 = -0.339981$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 51

مثال

حل:

برای نمونه:

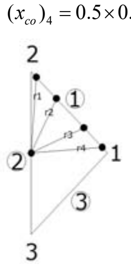
Y	X	شماره گره
1	1	1
2	0	2
0	0	3

G^{12} برای المان اول (از گره ۱ تا ۲) داریم

$a_x = 0.5 \quad b_x = 0.5$

$a_y = -0.5 \quad b_y = 1.5$

$$(x_{co})_1 = 0.5 \times (-0.861136) + 0.5 = 0.069 \qquad (y_{co})_1 = -0.5 \times (-0.861136) + 1.5 = 1.93$$
$$(x_{co})_2 = 0.5 \times (-0.339981) + 0.5 = 0.33 \qquad (y_{co})_2 = -0.5 \times (-0.339981) + 1.5 = 1.67$$
$$(x_{co})_3 = 0.5 \times 0.339981 + 0.5 = 0.67 \qquad (y_{co})_3 = -0.5 \times 0.339981 + 1.5 = 1.33$$
$$(x_{co})_4 = 0.5 \times 0.861136 + 0.5 = 0.93 \qquad (y_{co})_4 = -0.5 \times 0.861136 + 1.5 = 1.069$$



فاصله این نقاط از نقطه وسطی که روی المان دیگر

$$(r)_1 = \sqrt{((0.069 - 0)^2 + (1.93 - 1.0)^2)} = 0.932$$
$$(r)_2 = \sqrt{((0.33 - 0)^2 + (1.67 - 1.0)^2)} = 0.747$$
$$(r)_3 = \sqrt{((0.67 - 0)^2 + (1.33 - 1.0)^2)} = 0.747$$
$$(r)_4 = \sqrt{((0.93 - 0)^2 + (1.069 - 1.0)^2)} = 0.932$$

$$\sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k = \ln(\frac{1}{0.932}) \times 0.347854 + \ln(\frac{1}{0.747}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.747}) \times 0.652145 + \ln(\frac{1}{0.932}) \times 0.347854 = 0.431$$

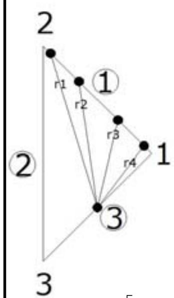
$$G^{12} = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=1}^{4} \ln(\frac{1}{(r)_k}) w_k \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2\pi} \times 0.431 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.048$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 52

مثال

حل:

G^{13} برای المان اول (از گره ۱ تا ۲) داریم



$$(r)_1=\sqrt{((0.069-0.5)^2+(1.93-0.5)^2)}=1.493$$
$$(r)_2=\sqrt{((0.69-0.5)^2+(1.93-0.5)^2)}=1.442$$
$$(r)_3=\sqrt{((0.67-0.5)^2+(1.33-0.5)^2)}=0.847$$
$$(r)_4=\sqrt{((0.93-0.5)^2+(1.069-0.5)^2)}=0.713$$

$$\sum_{k=1}^{4}\ln(\frac{1}{(r)_k})w_k=\ln(\frac{1}{1.493})\times 0.347854+\ln(\frac{1}{1.442})\times 0.652145+\ln(\frac{1}{0.847})\times 0.652145+\ln(\frac{1}{0.713})\times 0.347854=-0.153$$

$$G^{13}=\frac{1}{2\pi}\times\sum_{k=1}^{4}\ln(\frac{1}{(r)_k})w_k\times\frac{L}{2}=\frac{1}{2\pi}\times -0.153\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.017$$

به طریق مشابه سایر ضرایب محاسبه می شوند

$$G^{ii}=\frac{L}{2\pi}\times\left[\ln(\frac{1}{l/2})+1\right]$$

$$G^{11}=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\times\left[\ln(\frac{1}{\sqrt{2}/2})+1\right]=0.303$$

$$G^{22}=\frac{2}{2\pi}\times\left[\ln(\frac{1}{2/2})+1\right]=0.318$$

$$G^{33}=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\times\left[\ln(\frac{1}{\sqrt{2}/2})+1\right]=0.303$$

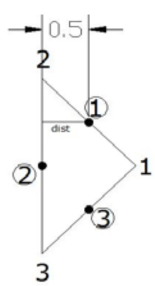
$$G^{ij}=\begin{bmatrix}0.303 & 0.048 & -0.017\\ 0.056 & 0.318 & 0.056\\ 0.017 & 0.048 & 0.303\end{bmatrix}$$

مثال

حل:

$$H^{ij}=\frac{1}{2\pi}\times\sum_{k=1}^{4}-\frac{1}{(r)_k^2}\times dist\times w_k\times\frac{L}{2}$$

پارامتر H^{12}



فاصله از نقطه وسط موجود در المان اول تا المان دوم $dist=0.5$

$$(r)_1=\sqrt{((0-0.5)^2+(1.86-1.5)^2)}=0.617$$
$$(r)_2=\sqrt{((0-0.5)^2+(0.138-1.5)^2)}=1.448$$
$$(r)_3=\sqrt{((0-0.5)^2+(1.339-1.5)^2)}=0.525$$
$$(r)_4=\sqrt{(0-0.5)^2+(0.66-1.5)^2)}=0.977$$

$$\sum_{k=1}^{4}(\frac{1}{(r)_k})^2w_k=(\frac{1}{0.617})^2\times 0.347854+(\frac{1}{0.525})^2\times 0.652145+(\frac{1}{0.977})^2\times 0.652145+(\frac{1}{1.448})^2\times 0.347854=4.131$$

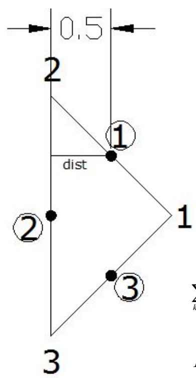
$$H^{12}=\frac{1}{2\pi}\times\sum_{k=1}^{4}-\frac{1}{(r)_k^2}\times dist\times w_k\times\frac{L}{2}=\frac{-1}{2\pi}\times 4.131\times 0.5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.232$$

مثال

حل:

$$H^{ij}=\frac{1}{2\pi}\times\sum_{k=1}^{4}-\frac{1}{(r)_k^2}\times dist\times w_k\times\frac{L}{2}$$

پارامتر H^{32}



فاصله از نقطه وسط موجود در المان سوم تا المان دوم $dist=0.5$

$$(r)_4=\sqrt{((0-0.5)^2+(1.86-0.5)^2)}=1.448$$
$$(r)_3=\sqrt{((0-0.5)^2+(0.138-0.5)^2)}=0.617$$
$$(r)_2=\sqrt{((0-0.5)^2+(1.339-0.5)^2)}=0.977$$
$$(r)_1=\sqrt{(0-0.5)^2+(0.66-0.5)^2)}=0.525$$

$$\sum_{k=1}^{4}(\frac{1}{(r)_k})^2 w_k=(\frac{1}{0.617})^2\times0.347854+(\frac{1}{0.525})^2\times0.652145+(\frac{1}{0.977})^2\times0.652145+(\frac{1}{1.448})^2\times0.347854=4.131$$

$$H^{32}=\frac{1}{2\pi}\times\sum_{k=1}^{4}-\frac{1}{(r)_k^2}\times dist\times w_k\times\frac{L}{2}=\frac{-1}{2\pi}\times4.131\times0.5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.232$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 55

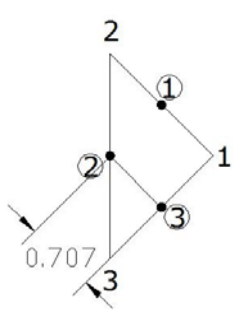
مثال

حل:

$$H^{ij}=\frac{1}{2\pi}\times\sum_{k=1}^{4}-\frac{1}{(r)_k^2}\times dist\times w_k\times\frac{L}{2}$$

پارامتر H^{23}

فاصله از نقطه وسط موجود در المان دوم تا المان سوم $dist=0.707$



$$(r)_1=\sqrt{((0.33-0)^2+(0.33-1.0)^2)}=0.747$$
$$(r)_2=\sqrt{((0.67-0)^2+(0.67-1.0)^2)}=0.747$$
$$(r)_3=\sqrt{((0.069-0)^2+(0.069-1.0)^2)}=0.934$$
$$(r)_4=\sqrt{((0.93-0)^2+(0.93-1.0)^2)}=0.934$$

$$\sum_{k=1}^{4}(\frac{1}{(r)_k})^2 w_k=(\frac{1}{0.934})^2\times0.347854+(\frac{1}{0.747})^2\times0.652145+(\frac{1}{0.747})^2\times0.652145+(\frac{1}{0934})^2\times0.347854=$$
$$=3.135$$

$$H^{23}=\frac{1}{2\pi}\times\sum_{k=1}^{4}-\frac{1}{(r)_k^2}\times dist\times w_k\times\frac{L}{2}=\frac{-1}{2\pi}\times(3.135)\times0.707\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.176$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 56

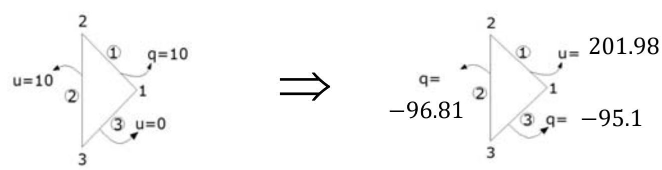
مثال

حل:

$$H^{ii}=0 \Rightarrow \begin{matrix} H^{11}=0 \\ H^{22}=0 \\ H^{33}=0 \end{matrix} \qquad H^{ij}=\begin{bmatrix} 0 & -0.176 & -0.164 \\ & 0 & -0.232 \\ sym. & & 0 \end{bmatrix}$$

$$HU=GQ \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -0.176 & -0.164 \\ -0.176 & 0 & -0.232 \\ -0.164 & -0.232 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.303 & 0.048 & -0.017 \\ 0.056 & 0.318 & 0.056 \\ 0.017 & 0.048 & 0.303 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$AX=F \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0.048 & -0.017 \\ 0.176 & 0.318 & 0.056 \\ 0.164 & 0.048 & 0.303 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3.030 \\ -0.560 \\ -0.336 \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix} u_1=201.98 \\ q_2=-96.81 \\ q_3=-95.1 \end{matrix}$$



Boundary Element Method (BEM)

References:

The Boundary Element Method in Engineering
A.A.BECKER

The Boundary Element Method for Engineers
C.A. Brebbia