روش های عددی در ژئومکانیک

Numerical methods in geomechnics

Hasan Ghasemzadeh

http://wp.kntu.ac.ir/ghasemzadeh

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فهرست عناوین و فصول

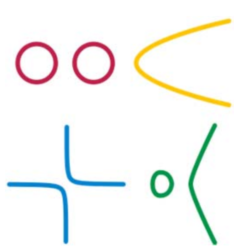
-آشنایی با توپولوژی، منیفلد(خمینه) در ریاضیات

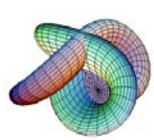
در توپولوژی خواص مهم یک شکل(پیوستگی و نزدیک بودن) تحت تغییرشکل پیوسته حفظ می شود

Manifolds are locally Euclidean spaces.

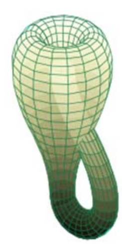
Two important classes of differentiable manifolds are smooth and analytic manifolds.
There are also manifolds which possess no differentiable structures

Example of Manifolds

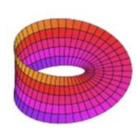




Morin surface



Klein bottle



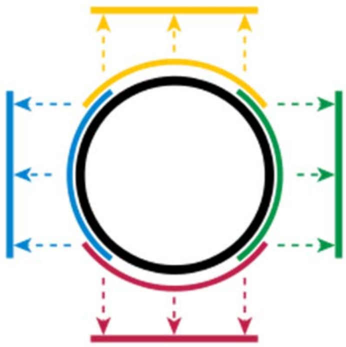
Mobius strip

2 Dr. Hasan Ghasemzadeh

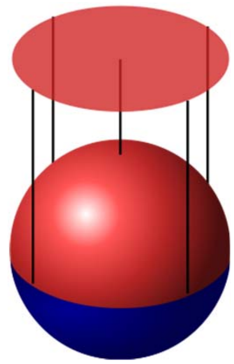
فهرست عناوین و فصول

Manifolds, i.e., locally Euclidean spaces

منیفلد(خمینه)



The four charts each map part of the circle to an open interval, and together cover the whole circle.



The chart maps the part of the sphere with positive z coordinate to a disc.

3 Dr. Hasan Ghasemzadeh

مقدمه

- انواع روش های عددی
  - روش های عددی در محیط های پیوسته
    - روش المان محدود (FEM)
    - روش تفاضل محدود (FDM)
  - روش های عددی در محیط های گسسته
    - روش المان های مجزا(DEM)
    - روش تحلیل تغییر شکل های گسسته(DDA)
  - روش های عددی در هر دو محیط پیوسته و گسسته
    - روش عددی ترکیب شده المان محدود با المان مجزا
    - روش عددی منیفلد(NMM)

۴ Dr. Hasan Ghasemzadeh

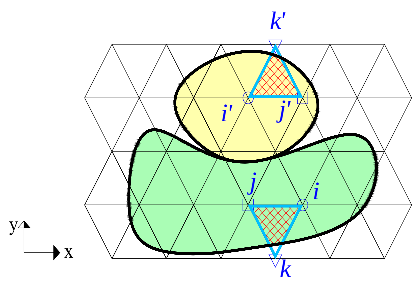
روش عددی منیفلد

- توانایی شبیه سازی در محیط پیوسته و گسسته را دارد.
- ویژگی اصلی آن استفاده از دو شبکه ریاضیاتی و فیزیکی مستقل از هم است که شبکه ریاضیاتی برای نوشتن معادلات ریاضی و شبکه فیزیکی جهت تعیین مرزها (انتگرال‌گیری) و تعیین محل ناپیوستگی‌ها استفاده می‌شود.
- شبکه ریاضیاتی می‌تواند هر شکل دلخواهی داشته باشد و استقلال آن از شبکه فیزیکی سبب راحتی شبکه بندی هندسه مسئله می‌شود.
- یکی از روش‌های نوین بر پایه تئوری افراز واحد است که اولین بار توسط شی در سال ۱۹۹۲ معرفی شد

5 Dr. Hasan Ghasemzadeh

ویژگی های روش منیفلد

1) مستقل بودن شبکه ریاضیاتی از شبکه فیزیکی (هندسه مسئله)
2) اختصاص مجهولات به پوشش های فیزیکی بجای نقاط
3) مدل سازی آسان ناپیوستگی ها و مرزهای مسئله
4) مدل سازی مسائل پیوسته و ناپیوسته در یک سیستم واحد
5) عدم نیاز به اضافه کردن پوشش برای شبیه سازی درجات بالاتر



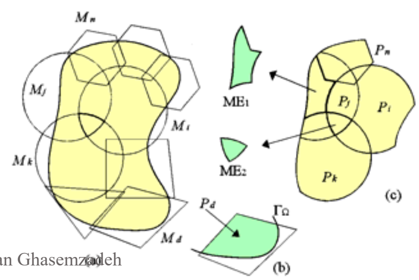
۶ Dr. Hasan Ghasemzadeh

برتری‌های روش عددی منیفلد نسبت به FEM

1) عدم نیاز به انطباق مش بندی به دامنه فیزیکی مسئله
2) مش بندی راحت‌تر و منظم‌تر
3) مدل سازی همزمان محیط گسسته و پیوسته
4) راحتی در شبیه سازی درجات بالاتر بدون تغییر در مش بندی مسئله

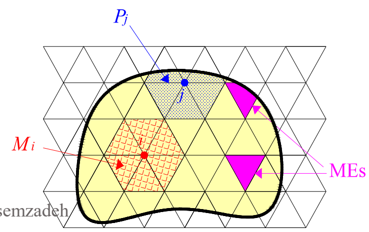
مفاهیم پایه روش عددی منیفلد

- پوشش‌های ریاضیاتی
  - قسمت های کوچکی که بایستی بگونه‌ای انتخاب شوند که کل دامنه مسئله را بپوشانند و از نظر تئوری می‌توانند هر شکل دلخواهی داشته باشند، با یکدیگر هم‌پوشانی کنند و یا مجزا باشند. نیازی با انطباق پوشش‌های ریاضیاتی با مرزهای خارجی یا ناپیوستگی‌های داخلی نمی‌باشد. به اجتماع پوشش‌های ریاضیاتی شبکه ریاضیاتی گفته می‌شود که برای محاسبات عددی مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- پوشش‌های فیزیکی
  - مرزهای خارجی و ناپیوستگی‌های داخلی ممکن است هر پوشش ریاضیاتی را به یک یا چند قطعه تقسیم کنند. این قطعات اگر درون دامنه فیزیکی مسئله قرار بگیرند تشکیل پوشش فیزیکی می‌دهند. به اجتماع پوشش‌های فیزیکی شبکه فیزیکی گفته می‌شود که برای مدل سازی دامنه مسئله و ناپیوستگی‌ها بکار می‌رود.



مفاهیم پایه روش عددی منیفلد

- المان‌ها منیفلد
  - منطقه هم‌پوشانی یک یا چندین پوشش فیزیکی تشکیل المان منیفلد را می‌دهد. المان‌های منیفلد با همدیگر همپوشانی ندارند و از اجتماع آن‌ها دامنه فیزیکی مسئله به وجود می‌آید.
- تابع شبیه‌ساز محلی پوشش ریاضیاتی
  - در روش منیفلد برای هر پوشش ریاضیاتی یک تابع شبیه‌ساز محلی اختصاص می‌یابد. نحوه اختصاص این توابع بسیار مهم و وابسته به شکل پوشش ریاضیاتی و شکل شبکه ریاضیاتی می‌باشد. انتخاب نادرست این توابع می‌توانند به مشکل وابستگی خطی مجهولات بیانجامد.
- تابع شبیه‌ساز المان منیفلد
  - تابع شبیه ساز المان منیفلد را می‌توان به وسیله تئوری افزاز واحد بدست آورد که در ادامه نحوه بدست آمدن آن شرح داده خواهد شد.



Dr. Hasan Ghasemzadeh ۹

وابستگی خطی در روش عددی منیفلد

- وابستگی خطی
  - هر شبیه‌سازی با استفاده از روش عددی منیفلد و نحوه انتخاب توابع شبیه‌ساز محلی پوشش‌های ریاضیاتی تشکیل تعداد معادلات همزمان مشخصی را می‌دهد، انتخاب مجهولات بیشتر از تعداد این معادلات همزمان مشکل وابستگی خطی مجهولات را در مسئله بوجود می‌آورد.
- عوامل ایجاد مسئله وابستگی خطی
  1) تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات
  2) تجمع مجهولات
  3) تاثیر شبکه ریاضیاتی

Dr. Hasan Ghasemzadeh ۱۰

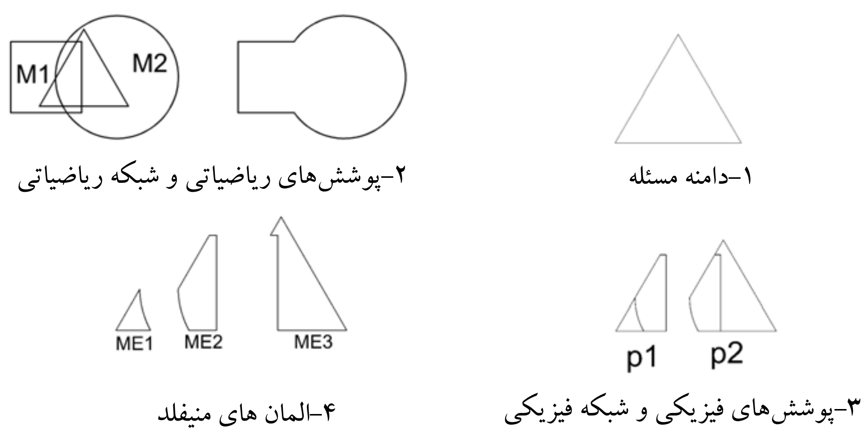
روش کلی حل مسئله در روش منیفلد

1) تقسیم کل دامنه فیزیکی به المان های منیفلد
2) تعریف توابع شبیه‌ساز محلی پوشش‌های ریاضیاتی
3) بدست آوردن توابع شبیه‌سازی المان‌های منیفلد با استفاده از تئوری افراز واحد
4) تشکیل تابع انرژی پتانسیل کل، المان‌های منیفلد با استفاده از توابع شبیه‌سازی المان‌های منیفلد
5) سرهم‌بندی توابع انرژی پتانسیل المان‌های منیفلد و تشکیل تابع انرژی پتانسیل کل مسئله
6) مینیمم کردن تابع انرژی پتانسیل کل و تشکیل معادلات همزمان
7) حل معادلات تعادل و بدست آوردن بردار مجهولات پوشش‌های ریاضیاتی

۱۱ Dr. Hasan Ghasemzadeh

مراحل شکل گیری المان منیفلد

- مراحل شکل گیری المان منیفلد برای یک محیط پیوسته بصورت زیر می‌باشد:



۱۲ Dr. Hasan Ghasemzadeh

تعریف تابع شبیه‌ساز محلی پوشش ریاضیاتی

- در روش منیفلد تابع مجهولات پوشش ریاضیاتی می‌تواند به هر صورت دلخواهی از توابع چند جمله ای و بصورت کامل یا غیر کامل انتخاب گردد:

$$\varphi(x,y)=\varphi_0+\varphi_1 x+\varphi_2 y+\varphi_3 x^2+\varphi_4 xy+\varphi_5 y^2+\cdots+\varphi_r x^{n_l}+\cdots+\varphi_m x^{n_l}$$

- در رابطه بالا n1 ماکزیمم درجه موجود در تابع مجهولات است. حذف هر یک از جملات چند جمله‌ای بالا برای جلوگیری از بوجود آمدن مسئله وابستگی خطی بلامانع می‌باشد و مطابق با شکل پوشش‌های ریاضیاتی و شبکه ریاضیاتی نحوه انتخاب متفاوت می‌باشد. انتخاب این تابع شبیه‌ساز از درجه صفر در تمام اشکال پوشش‌های ریاضیاتی از بوجود آمدن مشکل وابستگی خطی جلوگیری می کند ولی دقت نتایج را کاهش می‌دهد.

۱۳ Dr. Hasan Ghasemzadeh

فرم ماتریسی تابع شبیه‌ساز محلی پوشش ریاضیاتی

- فرم ماتریسی تابع شبیه‌ساز محلی پوشش ریاضیاتی بصورت زیر می‌باشد:

$$\varphi(x,y)=BU$$

$$B=[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \cdots \quad x^{n_l} \quad \cdots \quad y^{n_l}]$$

$$U=[\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad \varphi_5 \quad \cdots \quad \varphi_r \quad \cdots \quad \varphi_m]^T$$

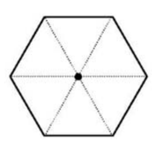
۱۴ Dr. Hasan Ghasemzadeh

تابع افراز واحد پوشش‌های ریاضیاتی

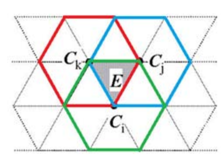
- تابع افراز واحد پوشش‌های ریاضیاتی بایستی شرایط زیر را داشته باشند:

$$0 \le \psi_i \le 1, \quad \forall x \in M_i$$
$$\psi_i = 0, \quad \forall x \notin M_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i = 1, \quad \forall x \in \Omega$$

بدست آوردن توابع افراز واحد در پوشش ریاضیاتی شش ضلعی



Hexagonal cover

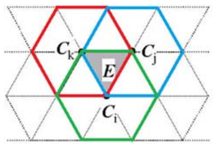


Triangular element

- همانند شکل بالا در پوشش‌های ریاضیاتی منظم شش ضلعی که تشکیل المان های منیفلد مثلثی می‌دهند توابع افراز واحد هر پوشش‌ریاضیاتی بصورتی تعریف می‌شوند که در مرکز شش ضلعی مقداری برابر با یک و در گوشه‌های شش ضلعی به مقدار صفر برسند.

توابع افراز واحد المان مثلثی

❖با استفاده از نحوه تعریف تابع افراز واحد یک پوشش شش ضلعی توابع افراز واحد یک المان مثلثی منیفلد بصورت زیر بدست می‌آید:



Triangular element

$$\begin{pmatrix} w_i(x,y) \\ w_j(x,y) \\ w_k(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} x_j y_k - x_k y_j & y_j - y_k & x_k - x_j \\ x_k y_i - x_i y_k & y_k - y_i & x_i - x_k \\ x_i y_j - x_j y_i & y_i - y_j & x_j - x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)$$

۱۷ Dr. Hasan Ghasemzadeh

تعریف تابع شبیه‌ساز مجهولات در المان منیفلد یک بعدی

- تابع مجهولات بر روی المان یک بعدی بصورت زیر می‌باشد:

$$\varphi_E = \sum_{i=1}^{m} \psi_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{m} \psi_i L_{\psi_i} B_i U_i$$

- که در آن m برابر با تعداد پوشش‌های ریاضیاتی است که در تشکیل المان منیفلد شرکت کرده‌اند، φ و ψ بترتیب تابع شبیه‌ساز محلی و تابع افراز واحد پوشش ریاضیاتی iام می‌باشد. فرم ماتریسی تابع بالا بصورت زیر می‌تواند نوشته شود.

$$\varphi_E = T\varphi \qquad \varphi = \begin{bmatrix} U_i \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T} = [T_1 \ \cdots \ T_m] \quad T_i = \psi_i L_{\psi_i} B_i$$

۱۸ Dr. Hasan Ghasemzadeh

تعریف تابع شبیه‌ساز مجهولات در المان منیفلد دو بعدی

- تابع مجهولات بر روی المان دو بعدی بصورت زیر می‌باشد:

$$\varphi_{E_x} = \sum_{i=1}^{m} \psi_i \varphi_{i_x} = \sum_{i=1}^{m} \psi_i L_{\psi_i} B_{i_x} U_{i_x}$$

$$\varphi_{E_y} = \sum_{i=1}^{m} \psi_i \varphi_{i_y} = \sum_{i=1}^{m} \psi_i L_{\psi_i} B_{i_x} U_{i_y}$$

$$\psi_l(x,y) = a_l + b_l x + c_l y; \quad (x,y) \in \mathrm{ME}; \; l = i,j,k$$

$$\psi_i(x,y) = \boldsymbol{\psi}_i \mathbf{L}_{\psi}(x,y)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i = [a_l \quad b_l \quad c_l]$$

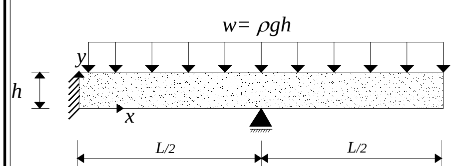
$$\mathbf{L}_{\psi}(x,y) = [1 \quad x \quad y]^T$$

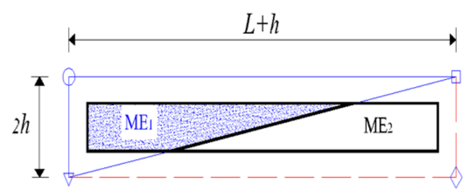
$$\varphi_E = T\varphi \qquad \varphi = \begin{bmatrix} U_{i_x} \\ U_{i_y} \\ \vdots \\ U_{m_x} \\ U_{m_y} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{T} = [T_i \quad \cdots \quad T_m] \quad T_i = \begin{bmatrix} \psi_i L_{\psi_i} B_{i_x} & 0 \\ 0 & \psi_i L_{\psi_i} B_{i_y} \end{bmatrix}$$

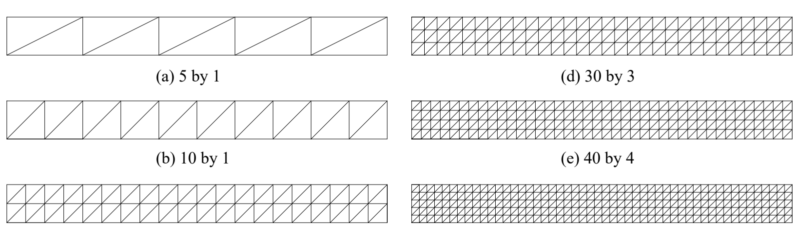
۱۹
Dr. Hasan Ghasemzadeh

مثال تیر طره



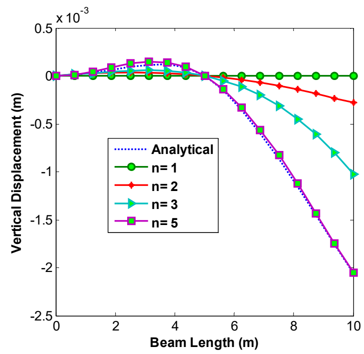


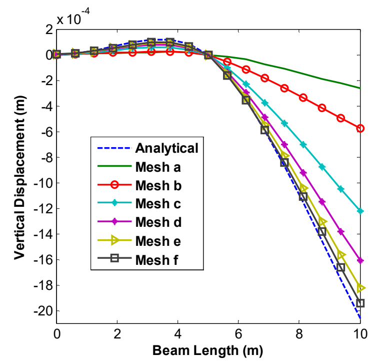
۱۰، ۲۰، ۸۰، ۱۸۰، ۳۲۰ و ۵۰۰ المان



(a) 5 by 1
(b) 10 by 1
(c) 20 by 2
(d) 30 by 3
(e) 40 by 4
(f) 50 by 5

20
Dr. Hasan Ghasemzadeh





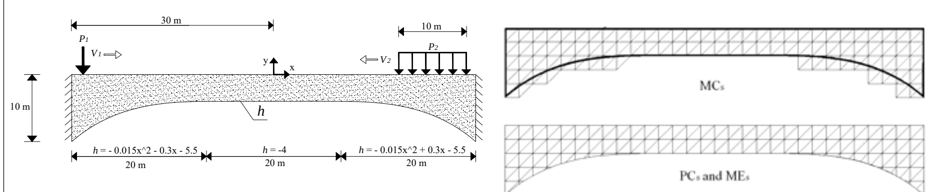
مقایسه روش عددی منفلد درجه بنج با روش عددی منفلد سنتی

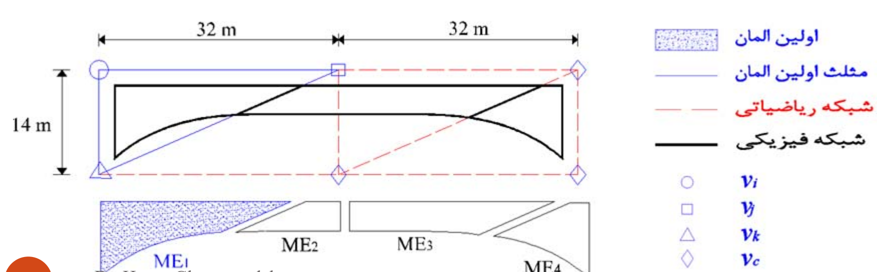
درجه منفلد	تعداد المان	تعداد مجهولات	ابعاد ماتریس سختی	مصرف زمان (ثانیه)	درصد خطا
منفلد درجه اول (منفلد سنتی)	۵۰۰	۶۱۲	۶۱۲×۶۱۲	۲/۸۴۹	٪ ۵/۲۲
منفلد درجه بنجم	۲	۷۲	۷۲×۷۲	۰/۱۹	٪ ۲/۶۷
نسبت مشخصات $\left(\frac{\text{NMM}}{\text{HONMM}}\right)$	۲۵۰	۸/۵	۸/۵×۸/۵	۱۴/۹۹	۱/۹۵۵

21

Dr. Hasan Ghasemzadeh

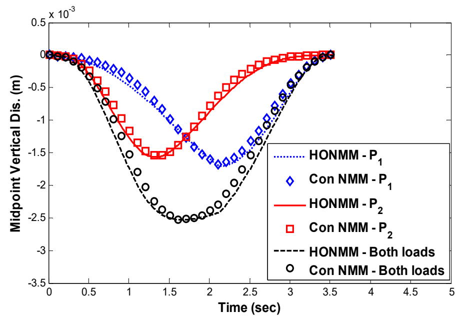
➢ مثال با هندسه و بارگذاری پیچیده





22

Dr. Hasan Ghasemzadeh



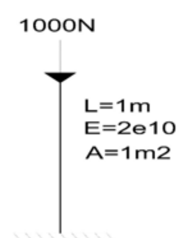
- نتایج شبیه‌سازی درجات بالا با ۴ المان و روش منیفلد سنتی با ۱۷۷ المان
- کمبود رنک منیفلد درجه ۳ در تمام حالا صفر

نوع بارگذاری	P_1	P_2	P_1 و P_2
منیفلد سنتی	۱۷/۸۲۳	۳۲/۸۰۷	۴۴/۶۶۵
منیفلد درجه سوم	۱۰/۴۸۲	۱۲/۸۶۷	۱۵/۸۷۱
نسبت زمانی (t_{NMM}/t_{HONMM})	۱/۷۰۰	۲/۵۵۰	۲/۸۱۴

23 Dr. Hasan Ghasemzadeh

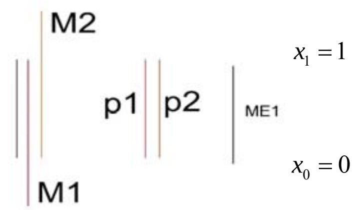
مثال

❖مقدار جابجایی ستون زیر را با استفاده از روش عددی منیفلد بدست آورید.



۲۴ Dr. Hasan Ghasemzadeh

❖تشکیل المان منیفلد مسئله بصورت زیر می‌باشد:



❖توابع افراز واحد پوشش ریاضیاتی بگونه‌ای تعریف می‌شوند که در مرکز پوشش ریاضیاتی مقداری برابر با یک و در انتهای پوشش ریاضیاتی مقداری برابر با صفر داشته باشند با استفاده از این تعریف توابع افراز واحد المان منیفلد بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\psi_1 = 1 - x = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$

$$\psi_2 = x = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$

25 Dr. Hasan Ghasemzadeh

❖توابع شبیه‌ساز پوشش‌های ریاضیاتی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

تغییر مکان در پوشش فیزیکی(ریاضیاتی) اول برحسب گره های صفر و یک

$$u_1 = [1 \quad x]\begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \end{bmatrix}$$

تغییر مکان در پوشش فیزیکی(ریاضیاتی) دوم

$$u_2 = [1 \quad x^2]\begin{bmatrix} u_{20} \\ u_{21} \end{bmatrix}$$

❖تابع شبیه‌ساز المان منیفلد بصورت زیر بدست می‌آید:

$$U = T\varphi \quad T_i = \psi_i L_{\psi_i} B_i \qquad T_1 = (1-x)[1 \quad x] \qquad T_2 = x[1 \quad x^2]$$

$$U = T\varphi = [1-x \quad x-x^2 \quad x \quad x^3]\begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{20} \\ u_{21} \end{bmatrix}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh ۲۶

❖تابع انرژی کل المان منیفلد به همراه فنر فرضی تکیه‌گاه بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma^T \varepsilon dx + \frac{1}{2}K_s U_{x=0}{}^2 - FU_{x=1} \\ \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x}, \sigma = E\varepsilon\end{array}\right\} \Pi = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x}^T E \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{1}{2}K_s U_{x=0}{}^2 - FU_{x=1}$$

❖با جایگذاری تابع شبیه‌ساز المان در معادله بالا و مینیمم کردن این انرژی رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial (T\varphi)^T}{\partial x} E \frac{\partial (T\varphi)}{\partial x} dx + \frac{1}{2}(T\varphi)^T K_s (T\varphi)_{x=0} - F(T\varphi)_{x=1}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x}^T E \frac{\partial T}{\partial x} dx\, \varphi + \frac{1}{2} K_s T^T T_{x=0} - FT_{x=1} = 0$$

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x}^T E \frac{\partial T}{\partial x} dx\, \varphi + \frac{1}{2} T^T K_s T_{x=0} = FT_{x=1}$$

۲۷ Hasan Ghasemzadeh

❖با انتگرال گیری و جایگذاری نقاط در رابطه بالا معادلات همزمان بصورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 3.6e15 & 0 & -2.0e10 & -2.0e10 \\ 0 & 6.67e9 & 0 & -1.0e10 \\ -2.0e10 & 0 & 2.0e10 & 2.0e10 \\ -2.0e10 & -1.0e10 & 2.0e10 & 3.6e10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{20} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1000 \\ -1000 \end{bmatrix}$$

❖با حل معادله بالا بردار مجهولات بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{20} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.78e-13 \\ 0 \\ -5.0e-8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲۸ Dr. Hasan Ghasemzadeh

❖با جایگذاری مختصات نقطه اثر نیرو در تابع شبیه‌ساز المان منیفلد مقدار جابجایی نقطه اثر نیرو بصورت زیر بدست می‌آید:

$$U = T\varphi = \begin{bmatrix} 1-x & x-x^2 & x & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{20} \\ u_{21} \end{bmatrix}$$

$$U_{x=1} = \begin{bmatrix} 1-x & x-x^2 & x & x^3 \end{bmatrix}_{x=1} \begin{bmatrix} \text{-2.78e-13} \\ 0 \\ \text{-5.0e-8} \\ 0 \end{bmatrix} = -5^{-8}$$

❖جواب تحلیلی مسئله با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$U_{x=1} = \frac{FL}{EA} = \frac{-1000*1}{2e10*1} = -5^{-8}$$

❖همانطور که مشخص است نتایج روش عددی منیفلد با نتیجه تحلیلی منطبق است.

۲۹ Dr. Hasan Ghasemzadeh

International Journal for © John Wiley & Sons, Ltd.

Numerical Methods in Engineering

International Journal for Numerical Methods in Engineering Impact Factor: 1.961

Dynamic high order numerical manifold method based on weighted residual method

H. Ghasemzadeh[1,*,†], M. A. Ramezanpour[2] and S. Bodaghpour[3]

10th International Congress on Civil Engineering, 5-7 May 2015
University of Tabriz, Tabriz, Iran

University of Tabriz

Removing the singularity of Dynamic High Order Numerical Manifold Method

M. A. Ramezanpour[1], H. Ghasemzadeh[2]

30 Dr. Hasan Ghasemzadeh

آشنایی با منیفلد

31 Dr. Hasan Ghasemzadeh

آشنایی با منیفلد

32 Dr. Hasan Ghasemzadeh

آشنایی با منیفلد

یک توپولوژی روی یک مجموعه مانند S به یک گردایه τ از زیر مجموعه هایی گویند که شامل مجموعه تهی باشد بصورتی که نسبت به اجتماع دلخواه و یا اشتراک متناهی از زیر مجموعه های S بسته است .

$$\text{if } U_\alpha \in \tau \to \quad \bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$$

$$\text{if } [U_1, U_2, \ldots, U_n] \in \tau \to \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$$

هر یک از اعضای τ یک مجوعه باز و به جفت (S,τ) یک فضای توپولوژی می گویند