روش های عددی در ژئومکانیک

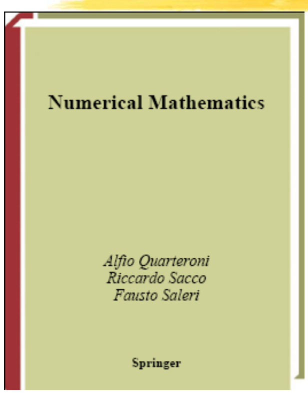
Numerical methods in geomechnics

Hasan Ghasemzadeh

http://wp.kntu.ac.ir/ghasemzadeh

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فهرست عناوین و فصول



روشهای عددی در حل معادلات

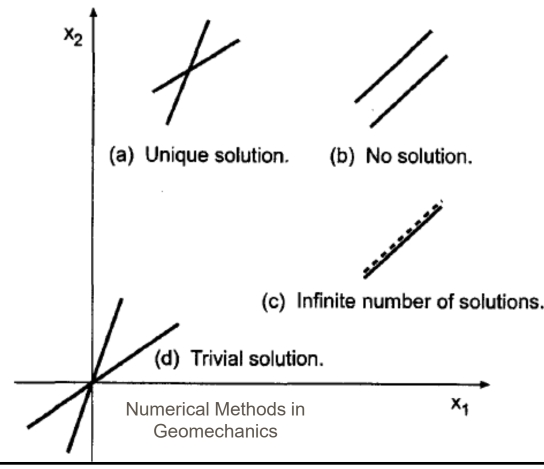
Numerical Mathematics 2000

Alfio Quarteroni
Riccardo Sacco
Fausto Saleri

روشهای عددی در حل معادلات جبری

جواب دو معادله در مجهول

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$



روشهای عددی در حل معادلات جبری

شکل استاندارد ماتریسی

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2N}x_N = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3N}x_N = b_3$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + a_{M3}x_3 + \cdots + a_{MN}x_N = b_M$$

In matrix form: $A\,x = b$

روشهای عددی در حل معادلات جبری

ماتریس ضرایب

In matrix form: $A\,x = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ماتریس قطری

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

روشهای عددی در حل معادلات جبری

ماتریس ضرایب

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ماتریس سه قطری

tridiagonal matrix

روشهای عددی در حل معادلات جبری

ماتریس ضرایب

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

ماتریس باندی

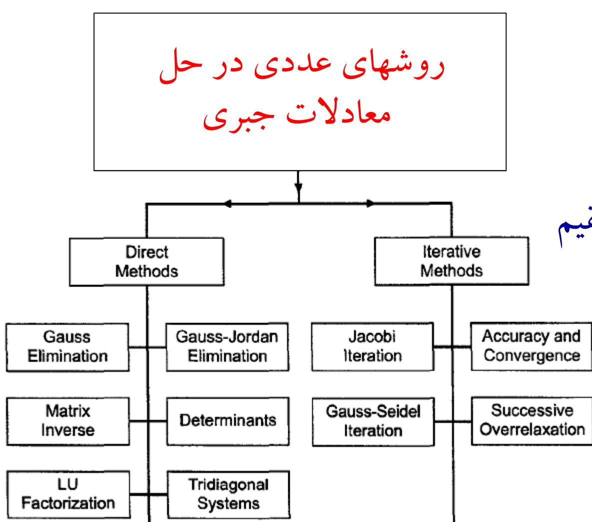
banded matrix

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{53} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ماتریس پراکنده

sparse matrix

روشهای عددی در حل معادلات جبری



معادلات خطی

۱- روش های حذف مستقیم

۲- روش های تکراری

معادلات غیر خطی

روشهای عددی در حل معادلات جبری

۱- روش های حذف مستقیم
روش کرامر

In matrix form: $A\,x = b$

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}^j)}{\det(\mathbf{A})} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

where A^j is the n*n matrix obtained by replacing column j in matrix A by the column vector b

computational cost $(n-1)(n+1)!$

Numerical Methods in Geomechanics 9

روشهای عددی در حل معادلات

In matrix form: $A\,x = b$

معادلات خطی
روش های مستقیم

۱- معکوس سازی ماتریس ضرایب
۲- روش حذف گوس
۳- روش تجزیه ماتریس

Numerical Methods in Geomechanics 10

معادلات خطی

۱- معکوس سازی ماتریس ضرایب $Ax = b$

- Find A^{-1}
- Compute det(A)
- Solve $A\,x = b$

- Round off error makes the system singular, or numerical instability makes the answer wrong.

Numerical Methods in Geomechanics 11

معادلات خطی

Gauss Elimination

۲- روش حذف گوس

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad i, j = 2, \ldots, n,$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}, \quad i = 2, \ldots, n,$$

Pivoting and stability

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 = -x_2 = -1/(1-\epsilon)$$

$\epsilon = 10^{-6}$ Multiplying first eq. by 10e6 subtracting from the second eq.

$(1 - 10^6) x_2 = -10^6$ $\quad x_2 = 1.000001 \approx 1$

Back substituting $\quad 10^{-6} x_1 = 1 - 1 \quad x_1 = 0 \quad$ wrong

Numerical Methods in Geomechanics 12

معادلات خطی

LU Decomposition $Ax = b$ ۳- روش تجزیه ماتریس

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$LU = A$

Thus $A\,x = (LU)\,x = L\,(U\,\mathrm{x}) = b$

Let $y = U\,x$, then solve y in $L\,y = b$ by forward substitution

Solve x in $U\,x = y$ by backward substitution

معادلات خطی

A تجزیه ماتریس

LU factorization of A = solving the following nonlinear system of n^2 *equations*

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{\min(i,j)} l_{ir} u_{rj}$$

1- *Doolittle* factorization

2-*Crout* factorization

3-LDM^T Factorization

معادلات خطی

Doolittle factorization

- supposing that the first k − 1 columns of L and U are available and setting $l_{kk}=1$
- equations can be solved in a sequential way with respect to the boxed variables

$$a_{kj} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj} + \boxed{u_{kj}}, \qquad j = k, \ldots, n$$
$$a_{ik} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk} + \boxed{l_{ik}}u_{kk}, \qquad i = k+1, \ldots, n.$$

- we thus obtain first the k-th row of U and then the k-th column of L, as follows:

for k = 1, . . . , n

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj} \qquad j = k, \ldots, n$$
$$l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk}\right) \qquad i = k+1, \ldots, n.$$

- computational cost n^2

Numerical Methods in Geomechanics 15

معادلات خطی

Crout's Algorithm

- Set $l_{ii}=1$ for all i
- computing first the k-th column of L and then the k-th row of U:

for k = 1, . . . , n

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk} \qquad i = k, \ldots, n$$
$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}\right) \qquad j = k+1, \ldots, n$$

Numerical Methods in Geomechanics 16

معادلات خطی

LDM^T Factorization

$$LDM^T = A$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- when A is symmetric M=L
- computational cost $n^3/3$

Numerical Methods in Geomechanics 17

معادلات خطی

Pivoting

- Pivoting is essential for stability
- Interchange rows to get largest u_{ii}
- Implicit pivoting (when comparing for the biggest elements in a column, use the normalized one so that the largest coefficient in an equation is 1)

Numerical Methods in Geomechanics 18

معادلات خطی

Compute A^{-1}

- Let $B = A^{-1}$
  then $AB = I$ (I is identity matrix)
  or $A [b_1, b_2, \ldots, b_N] = [e_1, e_2, \ldots, e_N]$
  or $A\, b_j = e_j$ for $j = 1, 2, \ldots, N$
  where b_j is the j-th column of B.

- I.e., to compute A^{-1}, we solve a linear system N times, each with unit vector e_j.

معادلات خطی

Compute det(A)

- Definition of determinant

$$\det(A) = \sum_P (-1)^P a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$$

- Properties of determinant
- Since $\det(LU) = \det(L)\det(U)$, thus
  $\det(A) = \det(U) = \prod_{j=1}^{N} u_{jj}$

معادلات خطی

Lapack is a free, high quality linear algebra solver package (downloadable at www.netlib.org/lapack/).

- Solution of linear systems, $Ax = b$
- Least-square problem, $\min \|Ax-b\|^2$
- Eigenvalue problems, $Ax = \lambda x$
- Singular value decomposition, $A = UsV^T$.

ماتریس های پیش ضرب و پس ضرب برای قطری کردن یک ماتریس

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

۱- هزینه : در هر مرحله نیاز به محاسبه باقیمانده دستگاه می باشد. در مورد یک ماتریس کامل هزینه محاسبه آن برای هر تکرار از مرتبه n^2 است که با روش مستقیم که در آن هزینه کل $2/3\ n^3$ میباشد قابل مقایسه است. بنابراین اگر تعداد تکرار مورد نیاز همگرایی وابسته به n ولی کمتر از آن باشد روش های تکراری می توانند با روشهای مستقیم رقابت کنند.

۲- ماتریسهای پراکنده : روشهای مستقیم کارایی مناسبی ندارند

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

$$A x = b$$

در روشهای تکراری یک رشته بردار جواب $x^{(k)}$ ساخته می شود
که از همگرایی آنها جواب بدست می آید

$$x = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$$

همگرایی با کنترل باقیمانده بدست می آید

$$\left\| x^{n} - x \right\| < \varepsilon$$

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

$$A x = b$$

$$x^{(0)} given, \quad x^{(k+1)} = B x^{(k)} + f, \; k \geq 0$$

B ماتریس تکرار و f برداری است که از b بدست می آید.

روش تکرار فوق با دستگاه معادله سازگار خواهد بود اگر B و f به صورتی باشند که

$$x = Bx + f \quad \textbf{یا} \quad f = (I - B) A^{-1} b.$$

سازگاری شرط کافی همگرایی نیست

خطای مرحله kام

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x$$

همگرایی برای هر حدس اولیه $x^{(0)}$

$$\lim_{k \to \infty} (e^{(k)}) = 0$$

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

مثال $2x = b$

روش تکرار $x^{(k+1)} = -x^{(k)} + b$

سازگار است ولی این روش برای هر حدس اولیه همگرایی نخواهد داشت

$x^{(0)} = 0 \qquad x^{(2k)} = 0, x^{(2k+1)} = b, \qquad k = 0, 1, \ldots$

همگرا $x^{(0)} = \frac{1}{2} b$

Numerical Methods in Geomechanics 25

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

شرط همگرایی $Ax = b$

معادله تکرار $x^{(0)} given, \quad x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \ k \geq 0$

تعریف: شعاع طیفی ماتریس $\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i(B)|$

قضیه: اگر معادله تکرار سازگار باشد بردار جوابها $x^{(k)}$ بازای تمام حدسهای اولیه همگرا خواهد بود اگر

$\rho(B) < 1$

Numerical Methods in Geomechanics 26

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

$$Ax = b \quad \Rightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$ روشهای تکراری خطی

تجزیه به دو ماتریس مناسب P , N که Pغیر منفرد(معکوس پذیر) است $A = P - N$

$$Px^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \qquad k \geq 0 \qquad B = P^{-1}N \qquad f = P^{-1}b$$

و یا

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + P^{-1}r^{(k)}$$

باقیمانده مرحله kام $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

حالت خاص:حل مستقیم $P = A, N = 0$

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

روشهای تکراری خطی

- روش ژاکوبی
- روش گاوس سایدل
- روش آزاد سازی

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

- روش ژاکوبی

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right], \qquad i = 1,\ldots,n.$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \qquad i = 1,\ldots,n.$$

$$P = D, \quad N = D - A = E + F$$

$$A = D - (E + F)$$

Dماتریس مولفه های قطری A
Eماتریس پایین مثلثی از قرینه مولفه های ماتریس A
Fماتریس بالا مثلثی از قرینه مولفه های ماتریس A

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

- روش ژاکوبی

$$B_j = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$$

JOR :Jacobi over-relaxation method

حالت عمومی تر با تعریف یک پارامتر آزاد سازی ω

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right] + (1-\omega)x_i^{(k)}, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

$$B_{j_\omega} = \omega B_j + (1-\omega)I$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)}$$

این روش برای هر $\omega \neq 0$ سازگار است
در حالت $\omega = 1$ همان روش جاکوبی است

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

- روش گاوس سایدل

روش گاوس- سایدل با روش جاکوبی در این امر تفاوت دارد که در مرحله k+1ام از مقادیر $x_i^{(k+1)}$ برای به روز کردن راه حل استفاده می شوند

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1-\omega) x_i^{(k)}, \qquad i = 1,\dots,n.$$

$$P = D - E, \quad N = F$$

$$B_{GS} = (D-E)^{-1} F$$

Numerical Methods in Geomechanics 31

روشهای عددی در حل معادلات

روش تکرار در حل معادلات خطی

- روش گاوس سایدل

SOR : Seidel over-relaxation method

حالت عمومی تر با تعریف یک پارامتر آزاد سازی ω

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(K+1)} - \sum_{j=i\neq 1}^{n} a_{ij} x_j^{(K)} + (1-\omega) x_i^{(K)}$$

$$(I - \omega D^{-1} E) x^{(k+1)} = \left[(1-\omega) I + \omega D^{-1} F \right] x^{(k)} + \omega D^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (\frac{1}{\omega} D - E)^{-1} r^{(k)}$$

این روش برای هر $\omega \neq 0$ سازگار است

در حالت $\omega = 1$ همان روش گاوس سایدل است

$\omega \in (0,1)$ under-relaxation

$\omega > 1$ over-relaxation

Numerical Methods in Geomechanics 32

روشهای تکرار در حل معادلات غیر خطی

- روش نیوتن

$f(x)=\cdot$

$$f_i(x) = f_i(x_k) + (\nabla f_i(x_k))^T(x - x_k) + O(\|x - x_k\|^2), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$f(x) = f(x_k) + J(x_k)(x - x_k) + O(\|x - x_k\|^2) = 0.$$

$$J(x_k)(x - x_k) = -f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \left(J(x_k)\right)^{-1} f(x_k)$$

$$(\mathrm{J}_\mathbf{F}(\mathbf{x}))_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)(\mathbf{x}), \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

Numerical Methods in Geomechanics 33

روشهای تکرار در حل معادلات غیر خطی

مثال به روش نیوتن

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$
$$y^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x_0 = 0.5,\ y_0 = 1$$

جواب دقیق

$$x = 0.35425$$
$$y = 1.13264$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-4 & 2y \\ 2 & 2y \end{pmatrix} \quad J^{-1} = \frac{1}{\det J}\begin{pmatrix} 2y & -2y \\ -2 & 2x-4 \end{pmatrix} \quad \det J = 2y(2x-4) - 4y \quad J^{-1}{}_{(0)} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - J(x_k, y_k)^{-1} \begin{pmatrix} x_k^2 + y_k^2 - 4x_n \\ y_k^2 + 2x_k - 2 \end{pmatrix}$$

k	x_k	y_k
1	0.35	1.15
2	0.35424528301887	1.13652584085316
3	0.35424868893322	1.13644297217273
4	0.35424868893541	1.13644296914943

Numerical Methods in Geomechanics 34

روشهای تکرار در حل معادلات غیر خطی

- روش نیوتن اصلاح شده

1- Cyclic updating of the Jacobian matrix

keeping the Jacobian matrix (more precisely, its factorization) unchanged for a certain number,

2. Inexact solution of the linear systems

the maximum number of admissible iterations is fixed *a priori*

3. Difference approximations of the Jacobian matrix

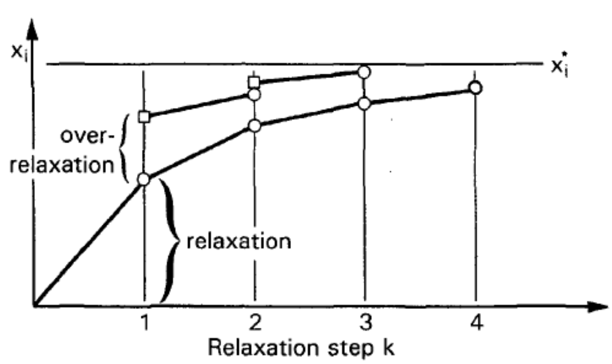
$$(\mathrm{J}_h^{(k)})_j = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)} + h_j^{(k)}\mathbf{e}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})}{h_j^{(k)}}, \qquad \forall k \geq 0.$$

Numerical Methods in Geomechanics 35

روشهای تکرار در حل معادلات غیر خطی

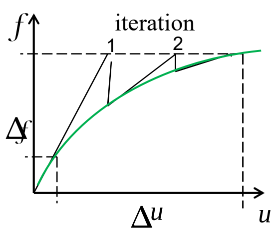
The Successive-Over-Relaxation (SOR) Method

- بیش آزادسازی متوالی

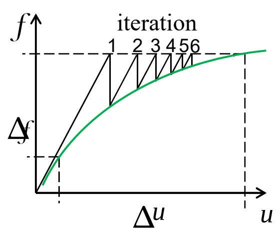


Numerical Methods in Geomechanics 36

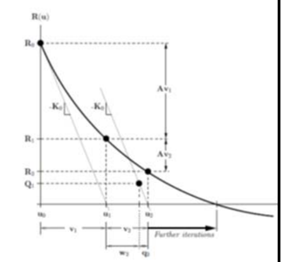
فهرست عناوین و فصول



NEWTON – RAPHSON
ITERATION



CONSTANT STIFFNESS
ITERATION



Krylov Newton iteration

روشهای تکرار در حل معادلات غیر خطی

- الگوریتم توماس