روش های عددی در ژئومکانیک

Numerical methods in geotechnic

روشهای باقیمانده وزن‌دار
The Method of Weighted Residuals

Hasan Ghasemzadeh

http://wp.kntu.ac.ir/ghasemzadeh

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

روشهای باقیمانده وزن‌دار

- روشهایی هستند که با استفاده از آنها می توان برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی حل تقریبی ارائه نمود.
- این روش ها مبنای کلیه روش های عددی نظیر روش اجزای محدود، اجزای مرزی و ... می‌باشد.

فرم استاندارد معادله دیفرانسیل:

$$L(u) - p = 0$$

L : اپراتور مشتق گیری

p : ثابت معادله یا بارگذاری

u : تابع پاسخ

$1) EI\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} - q = 0$	$L = EI\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}$	$p = q$
$2) \nabla^2 h = 0$	$L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$	$p = 0$
$3) \dfrac{\partial u}{\partial t} = C_v \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$	$L = \dfrac{\partial}{\partial t} - C_v \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$	$p = 0$
$4) EI\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q = 0$	$L = EI\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$	$p = -q$

روشهای باقیمانده وزن‌دار

جواب دقیق به پاسخی اطلاق می‌شود که :

اولا: در کلیه نقاط حوزه، معادله دیفرانسیل را ارضا نماید.

ثانیا:کلیه‌ی شرایط مرزی را ارضا نماید.

در غیاب جواب دقیق از جواب تقریبی استفاده می‌کنیم.که این جواب الزاما می‌بایست شرایط مرزی ضروری را ارضا نماید. اما بدیهی است که نمیتواند در کلیه‌ی نقاط حوزه، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم را ارضا کند زیرا اگر این امر رخ دهد ما به جواب دقیق رسیده ایم.

$$u : L(u) - p = \varepsilon(Error)$$

روشهای باقیمانده وزن‌دار

- اساس کلیه روش های باقی مانده وزنی بر این اصل استوار است که حاصلضرب داخلی تابع error در یک تابع وزنی برابر صفر گردد.

$$O(\varepsilon, w) = \int_{\Omega} \varepsilon . w . d\Omega = 0$$

$$if \ \ w = 1 \qquad O = \int_{\Omega} \varepsilon \, d\Omega = 0$$

روشهای باقیمانده وزن‌دار

بر حسب انتخاب تابع وزنی روشهای مختلف باقی مانده وزنی از هم متمایز می‌شوند.

چهار روش باقی مانده وزنی :

۱.روش نقطه‌یابی Collocation Method

۲.روش حداقل مربعات Least Square Method

۳. روش لنگرها Moment Method

۴. روش گالرکین Galerkin Method

Dr. Hasan Ghasemzadeh 5

Collocation Method روش نقطه‌یابی

در این روش تابع error در چند نقطه‌ی خاص از حوزه برابر صفر قرار داده می‌شود.

$$u \simeq \hat{u} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

$$\varphi_0 = 1$$

$$\varphi_1 = x$$

$$\varphi_2 = x^2$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 6

Collocation Method روش نقطه‌یابی

تعریف تابع دیراک: $\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & x\neq x_0\\ \infty & x=x_0\end{cases}$, $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1$

خاصیت تابع دیراک dirac: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)$

در روش نقطه‌یابی در حقیقت تابع وزنی همان تابع دیراک است.

$$O(\varepsilon,w)=\int_\Omega \varepsilon.w.d\Omega=0$$

$$\omega=\delta(x-x_0)\Rightarrow\int\varepsilon\delta(x-x_0)dx=0\Rightarrow\varepsilon(x_0)=0$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 7

Collocation Method روش نقطه‌یابی

example:

$$ODE:\ L(u)-p=\frac{d^2u}{dx^2}+u+x=0 \qquad \Omega: 0\le x\le 1$$

$$B.C:\begin{cases}x=0 & u=0\\ x=1 & u=0\end{cases} \qquad u_{exact}=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$$

$$u\approx\hat{u}=a_1x(1-x)+a_2x^2(1-x)$$ تقریب با توابع پایه یا توابع انترپولاسیون

$$L(\hat{u})-p=\varepsilon=x+(-2+x-x^2)a_1+(2-6x+x^2-x^3)a_2$$

$0<x<1$ $\qquad x=\frac{1}{2}\rightarrow\omega=\delta(x-\frac{1}{2})\Rightarrow\int\varepsilon\omega d\Omega=\int_0^1\varepsilon\delta(x-\frac{1}{2})dx\Rightarrow\varepsilon(\frac{1}{2})=0$

$$\Rightarrow\frac{7}{4}a_1+\frac{7}{8}a_2=\frac{1}{2}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 8

Collocation Method روش نقطه‌یابی

- توابع انترپولاسیون به نحوی انتخاب شده‌اند که شرایط مرزی ضروری را ارضا نمایند.
- تعداد نقاط انتخاب شده برابر با تعداد جملات بسط یا تعداد مجهولات است .

$0<x<1 \qquad x=\frac{1}{4}\to\omega=\delta(x-\frac{1}{4})\Rightarrow\int\varepsilon\omega d\Omega=\int_0^1\varepsilon\delta(x-\frac{1}{4})dx\Rightarrow\varepsilon(\frac{1}{4})=0$

$$\Rightarrow\frac{29}{16}a_1-\frac{35}{64}a_2=\frac{1}{4}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{29}{16} & \frac{-35}{64}\\ \frac{7}{4} & \frac{7}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow a_1=\frac{6}{31} \quad , \quad a_2=\frac{40}{217}$$

$$\hat{u}=\frac{6}{31}x(1-x)+\frac{40}{217}x^2(1-x)$$

x	$U_{collocation}$	U_{exact}
0	0	0
0.25	0.045	0.044
0.5	0.071	0.069
0.75	0.062	0.061
1	0	0
Test $x=0.95$	0.01751	0.0166

Moment Method روش لنگرها (گشتاور صفر)

توابع وزنه مختلف : $\omega_i=x^i$

$\omega_0=1 \quad , \quad \omega_1=x \quad , \quad \omega_2=x^2,...$

$Example:\ ODE:\ L(u)-p=\frac{d^2u}{dx^2}+u+x=0 \quad \Omega:0\le x\le 1 \qquad u\approx\hat{u}=x=a_1x(1-x)+a_2x^2(1-x)$

$$L(u)-p=\varepsilon=x+(-2+x-x^2)a_1+(2-6x+x^2-x^3)a_2$$

$$(\varepsilon,\omega_0)=(\varepsilon,1)=\int_0^1(x+(-2+x-x^2)a_1+(2-6x+x^2-x^3)a_2)dx=0$$

$$\Rightarrow\frac{11}{6}a_1+\frac{11}{12}a_2=1$$

$$(\varepsilon,\omega_1)=(\varepsilon,x)=\int_0^1(x+(-2+x-x^2)a_1+(2-6x+x^2-x^3)a_2)xdx=0$$

$$\Rightarrow\frac{11}{12}a_1+\frac{19}{20}a_2=\frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{11}{6} & \frac{11}{12}\\ \frac{11}{12} & \frac{19}{20}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow a_1=\frac{122}{649} \quad , \quad a_2=\frac{110}{649}$$

$$\hat{u}=\frac{122}{649}x(1-x)+\frac{110}{649}x^2(1-x)$$

x	U_{moment}	U_{exact}
0	0	0
0.25	0.043	0.044
0.5	0.068	0.069
0.75	0.059	0.060
1	0	0
Test $x=0.95$	0.0172	0.0166

Least Square Method روش حداقل مربعات

در این روش ε^2 را حداقل میکنیم .
در این روش نرم خطا و به عبارتی دیگر حاصل ضرب عددی خطا در خودش مینیمم میشود.

$$\omega_i = L(\varphi_i)$$

$$\varepsilon(Error) = L(\hat{u}) - p = L(\sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi_i)) - p \neq 0$$

$$Min(\varepsilon \times \varepsilon)$$

$$Min[(L(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i) - p) \times (L(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varphi_{ij}) - p)]$$

$$Min[(L(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i) \times L(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i)) - 2(L(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i) \times p)]$$

به همین ترتیب ادامه می دهیم.

Dr. Hasan Ghasemzadeh 11

Least Square Method روش حداقل مربعات

$$\hat{u} = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$$

$$\varphi_1 = x - x^2$$

$$\varphi_2 = x^2 - x^3$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + 1$$

$$\omega_1 = L(\varphi_1) = \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \varphi_1 = -2 + x - x^2$$

$$\omega_2 = L(\varphi_2) = \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \varphi_2 = 2 - 6x + x^2 - x^3$$

$$(\varepsilon, \omega_1) = \int \varepsilon\omega_1 d\Omega = \int_0^1 (x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2)(-2 + x - x^2)dx = 0$$

$$\Rightarrow 201a_1 + 101a_2 = 55$$

$$(\varepsilon, \omega_2) = \int \varepsilon\omega_2 d\Omega = \int_0^1 (x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2)(2 - 6x + x^2 - x^3)dx = 0$$

$$\Rightarrow 101a_1 + 153a_2 = 55 \Rightarrow \quad a_1 = 0.192 \quad , \quad a_2 = 0.162$$

	x	$U_{\text{least square}}$	U_{exact}
	0	0	0
	0.25	0.044	0.044
	0.5	0.069	0.069
	0.75	0.060	0.060
	1	0	0
Test	$x = 0.95$	0.0164	0.0166

Galerkin Method روش گالرکین

یکی از دقیق‌ترین روش‌ها است.

روش عمومی گالرکین : در این روش توابع وزنی در حقیقت همان توابع انترپولاسیون هستند.

$$\omega_i = \varphi_i$$

$$(\varepsilon,\varphi_1) = \int_0^1 (x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2)(x(1-x))dx = 0$$

$$[\int_0^1 (-2 + x - x^2)(x(1-x))dx]a_1 + [\int_0^1 (2 - 6x + x^2 - x^3)(x(1-x))]a_2 = -\int_0^1 x^2(1-x)dx$$

$$(\varepsilon,\varphi_2) = \int_0^1 (x + (-2 + x - x^2)a_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)a_2)(x^2(1-x))dx = 0$$

$$[\int_0^1 (-2 + x - x^2)x^2(1-x)dx]a_1 + [\int_0^1 (2 - 6x + x^2 - x^3)(x^2(1-x))dx]a_2 = -\int_0^1 x^3(1-x)dx$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{24} \\ \frac{3}{24} & \frac{13}{105} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad a_1 = \frac{71}{369} \quad , \quad a_2 = \frac{7}{91}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u} = \frac{71}{369}x(1-x) + \frac{7}{91}x^2(1-x)$$

x	U_{gal}	U_{exact}
0.0	0	0.0
0.25	0.0397	0.044
0.5	0.0577	0.069
0.75	0.0469	0.060
0.95	0.0126	0.0166
1	0	0

روش گالرکین پیشرفته

در این روش یک مرحله روش جزء به جزء هم گرفته میشود. $\int u dv = [uv] - \int v du$

$$\varepsilon : \frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0$$

$$(\varepsilon,\omega) = \int_0^1 (\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + \hat{u} + x)\omega dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\frac{d^2\hat{u}}{dx^2}\omega + \hat{u}\omega + x\omega)dx = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d\hat{u}}{dx}\omega\right]_0^1 - \int_0^1 (\frac{du}{dx}\frac{d\omega}{dx})dx + \int_0^1 u\omega dx + \int_0^1 x\omega dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{d\omega}{dx}dx - \int_0^1 u\omega dx = \int_0^1 x\omega dx \qquad u = a_i\,\varphi_i \quad , \quad \omega = \varphi_j$$

روش گالرکین پیشرفته

در این حالت از مرتبه مشتق پذیری ϕها کاسته می شود و ما می‌توانیم ϕ ساده تری انتخاب کنیم، ضمنا ماتریس سختی نیز متقارن می گردد.

$$u = a_i \quad , \quad \omega = \varphi_j$$

$$\frac{du}{dx} = a_i \frac{d\varphi_i}{dx} \quad , \quad \frac{d\omega}{dx} = a_i \frac{d\varphi_j}{dx}$$

$$a_i \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}\right)dx - a_i \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx = \int_0^1 x\varphi_j dx$$

$$a_i k_{ij} = f_j$$

$$k_{ij} = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} - \varphi_i\varphi_j\right)dx \quad , \quad f_j = \int_0^1 x\varphi_j dx$$

در گالرکین پیشرفته اول یکمرحله جزءبه جزء می رویم و بعد ϕ را قرار می دهیم.

روش گالرکین پیشرفته

- در فرم پیشرفته روش گالرکین پس از تشکیل تابع حاصلضرب خطا در تابع وزنی،تابع وزنی مستقیما بوسیله‌ی توابع پایه(base function) جایگزین نمی شود بلکه در ابتدا بوسیله‌ی عمل انتگرال جزءبه جزء فرم ضعیف تشکیل می‌شود و سپس به جای W وϕ جایگذاری می‌شودweak form کردن تا جائیکه درجه مشتق پذیری تابع u با w برابر شود ادامه میابد.

Galerkin Method روش گالرکین

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 = x(1-x) \\ \varphi_2 = x^2(1-x) \\ i=1, j=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow k_{11} = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\cdot\frac{d\varphi_1}{dx} - \varphi_1\varphi_1\right)dx = \int_0^1 [(1-2x)^2 - (x(1-x))^2]dx$$

$$f_1 = \int_0^1 x\varphi_1 dx = \int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \qquad \ldots\ k_{12}, k_{21}, k_{22}, f_2$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 17

جمع بندی:

No.	*Method*	*Weight function*
1.	*collocation*	$\delta(x-x_0)$
2.	*moment*	$\omega_i = x^i$
3.	*least-square*	$\omega_i = L(\varphi_i)$
4.	*Galerkin*	$\omega_i = \varphi_i$

Dr. Hasan Ghasemzadeh 18