

روش های عددی در ژئومکانیک

Finite Volume Method

Hasan Ghasemzadeh

<http://sahand.kntu.ac.ir/~ghasemzadeh/indexfa.html>

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

عناوین

- معرفی روش حجم محدود
- پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و پایا)
- پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)
- جابجایی - پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و پایا)
- جابجایی - پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)

Numerical Methods in Geomechanics 2

معرفی روش حجم محدود (Finite Volume)

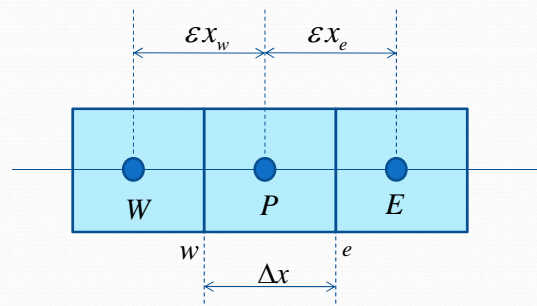
- گسسته سازی میدان پیوسته (تشکیل سلولهای مجزا)
- گسسته سازی معادله حاکم روی میدان گسسته شده (با انتگرال گیری و انتخاب توزیع مناسب متغیرها)
- ایجاد دستگاه معادلات (ارتباط هر سلول با سلولهای اطراف)
- خطی سازی دستگاه در راستای حل آن

Numerical Methods in Geomechanics

3

پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و پایا)

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dC}{dx} \right) + S = 0.0$$



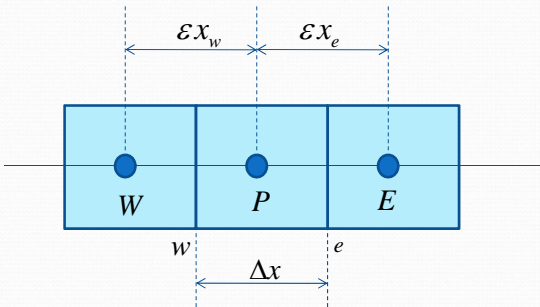
- بعد در y و z واحد است

Numerical Methods in Geomechanics

4

پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و پایا)

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dC}{dx} \right) + S = 0.0$$



$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dC}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0.0 \Rightarrow \left[k \left(\frac{dC}{dx} \right) \right]_w^e + \int_w^e S dx = 0.0$$

$$\left(k \frac{dC}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dC}{dx} \right)_w + \int_w^e S dx = 0.0$$

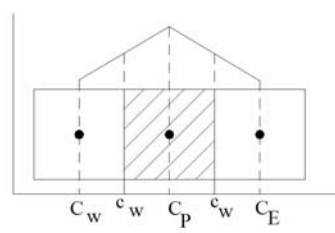
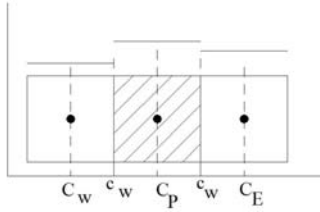
Numerical Methods in Geomechanics 5

توزیع متغیرها روی نقاط نماینده

از توزیع‌های مختلف مثل ثابت یا خطی می توان استفاده نمود

فرض

مقدار C در فاصله گره‌ها به صورت خطی تغییر می‌کند
مقدار چشمه یا چاهک (S) فرض می‌گردد در هر سلول عدد ثابت است.

$$\left(k_e \frac{C_E - C_P}{\varepsilon x_e} \right) - \left(k_w \frac{C_P - C_W}{\varepsilon x_w} \right) + S_p \Delta x = 0.0$$

$$C_E \left(\frac{k_e}{\varepsilon x_e} \right) - C_P \left(\frac{k_e}{\varepsilon x_e} + \frac{k_w}{\varepsilon x_w} \right) + C_W \left(\frac{k_w}{\varepsilon x_w} \right) + S_p \Delta x = 0.0$$

$$a_p C_P = a_E C_E + a_W C_W + b \quad \text{and} \quad a_p = a_E + a_W$$

Numerical Methods in Geomechanics 6

رفتار چشمه یا چاه (Source or Sink):

اگر S تابعی غیر خطی از متغیر C باشد، باید خطی سازی انجام پذیرد (مثال زیر).

$$S = S_c + S_u C_p$$

Example : $S = 4 - 5C^3$

1) $S_u = 0.0 \quad S_c = 4 - 5C_*^3$

2) $S_u = -5C_*^2 \quad S_c = 4$

C_* مقدار متغیر در مرحله قبل می باشد که معلوم فرض می گردد. می توان رابطه پیشنهادی، مماس بر منحنی S و C باشد.

$$\left(\frac{dS}{dC}\right)_* = \frac{S - S_c}{C - C_*}$$

$$3) (-15C_*^2) = \frac{S - (4 - 5C_*^3)}{C - C_*} \Rightarrow S_u = -15C_*^2 \quad S_c = 4 + 10C_*^3$$

$$4) S_u = -25C_*^2 \quad S_c = 4 + 20C_*^3$$

Numerical Methods in Geomechanics

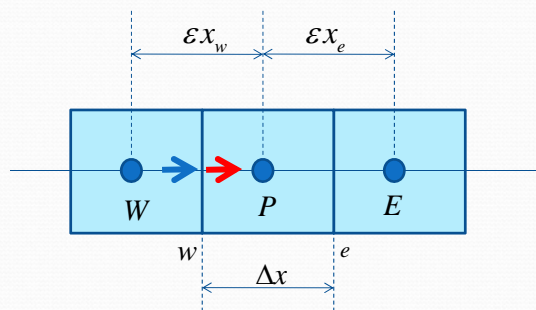
7

چهار قاعده اصلی:

• ۱- سازگاری وجوه در حجم کنترل:

خروجی شار از سلول W باید برابر ورودی به سلول P باشد.

این شرط بدیهی ممکن است با فرض توزیع مختلف برای k نادیده گرفته شود.

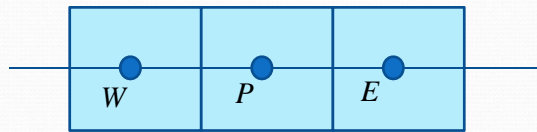


Numerical Methods in Geomechanics

8

چهار قاعده اصلی:

- ۲- قاعده ضرایب مثبت: تناسب افزایش مقدار C در نقاط مجاور باید سبب افزایش C در P و کاهش سبب کاهش گردد.
- در واقع a_P با a_E و a_W هم علامت است که برای راحتی می‌گوییم همواره باید مثبت باشد. در صورت نقض شدن این امر، کل ترم منفی در دل b می‌آید.



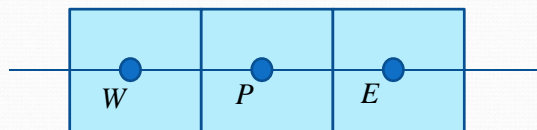
$$a_P C_P = a_E C_E + a_W C_W + b \quad \text{and} \quad a_P = a_E + a_W$$

Numerical Methods in Geomechanics

9

چهار قاعده اصلی:

- ۳- خطی سازی جمله چشمه با شیب منفی: برای نقض شدن قاعده دوم S_{ii} همواره باید منفی باشد.
- ۴- مجموع ضرایب همسایه: اگر S به C وابسته نبود، مجموع a_E و a_W خواهد بود.



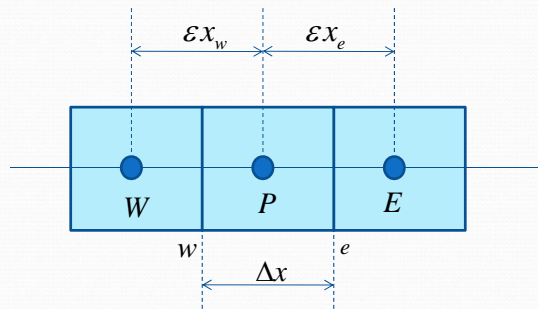
Numerical Methods in Geomechanics

10

نکات:

- برای ضریب پخش (K) نیز ممکن است توزیع خاصی فرض گردد. در اغلب مسائل مهندسی این ضریب در سرتاسر میدان حل ثابت فرض می گردد.
- برای ساده سازی گسسته سازی می توان فرض نمود که گره ها در وسط وجوه می باشند و احجام با هم برابر است، بنابراین خواهیم داشت :

$$\varepsilon x_w = \varepsilon x_e = \Delta x$$

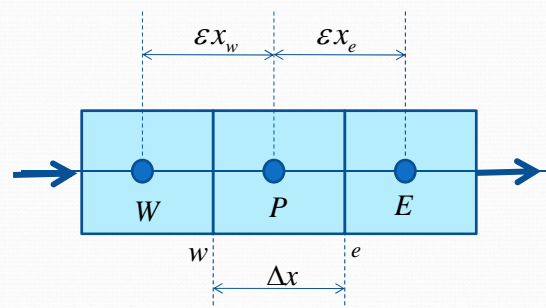


Numerical Methods in Geomechanics

11

نکات:

- مقدار ریز نمودن و دقت شبکه قاعده عمومی ندارد. در جایی که توزیع نسبتاً هموارتر باشد (شیب تغییرات ملایم باشد) می توان شبکه درشت به کار ببریم و برعکس در شیب های تند از شبکه ریزتر استفاده می شود.
- شرایط مرزی در گره های ابتدایی و انتهایی باید استفاده گردد. (مقادیر معلوم در مرزها و یا مشخص بودن شار بخش در دو گره ابتدایی و انتهایی)



Numerical Methods in Geomechanics

12

نکات:

- وقتی ماتریس ضرایب معادلات نوشته می شود، تمامی ضرایب غیر صفر در امتداد سه قطر از ماتریس قرار می گیرند. برای حل این دستگاه، الگوریتم ماتریس سه قطری (TDMA)، حل کننده قوی و مناسب می باشد

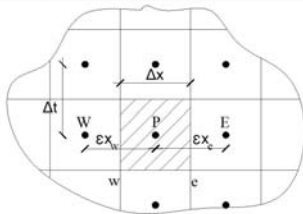
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Numerical Methods in Geomechanics

13

پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)

$$\rho c \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (\rho c = cte)$$



- از آنجایی که زمان مختصات یک راهه می باشد، بدین معنی که بر خلاف مکان که علاوه بر گره قبلی به گره جلویی نیز وابسته است، زمان فقط به گذشته مربوط می باشد. بنابراین با معلوم بودن مقادیر گره ای C در لحظه t، مقادیر C را در لحظه t + Δt بدست می آوریم. مقادیر قدیمی (معلوم) C در گره ها توسط C_w^0, C_e^0, C_p^0 و مقادیر جدید (مجهول) در لحظه t + Δt وسیله C_w^1, C_e^1, C_p^1 نشان داده می شوند.

Numerical Methods in Geomechanics

14

پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial C}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial C}{\partial x}) dx dt$$

$$\rho c (C_P^1 - C_P^0) \Delta x = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{k_e (C_E - C_P)}{\varepsilon x_e} - \frac{k_w (C_P - C_W)}{\varepsilon x_w} \right] dt$$

برای زمان بین سطر حاضر (t) و سطر بعد (t + Δt) یک پروفیل خطی لحاظ میشود.

$$\rho c (C_P^1 - C_P^0) \frac{\Delta x}{\Delta t} = f \left[\frac{k_e (C_E^1 - C_P^1)}{\varepsilon x_e} - \frac{k_w (C_P^1 - C_W^1)}{\varepsilon x_w} \right] + (1-f) \left[\frac{k_e (C_E^0 - C_P^0)}{\varepsilon x_e} - \frac{k_w (C_P^0 - C_W^0)}{\varepsilon x_w} \right]$$

پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)

اگر $f=0$ فرض گردد. ارتباط سلول در زمان حاضر (t) با سلولهای مجاور قطع خواهد شد، بنابراین یک حل صریح (Explicit) خواهیم داشت.

$$a_p^0 C_P = a_E C_E^0 + a_W C_W^0 + (a_p^0 - a_E - a_W) C_P^0 \quad a_p^0 = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$a_p^0 - a_E - a_W > 0 \Rightarrow \rho c \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{k}{\Delta x} + \frac{k}{\Delta x} \Rightarrow \Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2k}$$

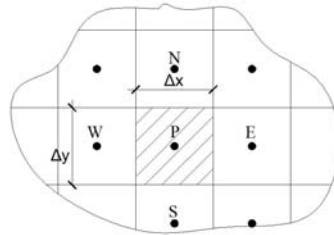
اگر $f=1.0$ فرض گردد، یک حل کاملاً ضمنی خواهیم داشت (Fully Implicit)

اگر $f=0.5$ طرح کرانک-نیکلسون

$$a_p^0 - 0.5a_E - 0.5a_W > 0 \Rightarrow \Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{k}$$

نکات:

- در حلهای صریح و کرانک- نیکلسون گام زمانی به گام مکانی انتخابی وابسته خواهد بود. و این امر سبب انتخاب Δt کوچک خواهد شد که تعداد معادلات و در نتیجه زمان حل بالا خواهد رفت.
- در حل معادله پخش خاص غیر دائم در دو بعد پروفیل زمان کاملا ضمنی فرض میگردد.
- ماتریس دستگاه حاصله پنج قطری خواهد بود که باید به سه قطری تبدیل گردد.



$$a_P C_P = a_N C_N^* + a_E C_E + a_W C_W + a_S C_S^* + b$$

- اعمال ضرایب زیر تخفیف (under relaxation factor) از نوسانات همگرایی که گاهی موجب واگرایی میشود، جلوگیری میکند.

Numerical Methods in Geomechanics

17

جابجایی- پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و پایا)

$$\frac{d}{dx}(\rho u C) = \frac{d}{dx} \left(k \frac{dC}{dx} \right)$$

$$\text{continuity : } \frac{d}{dx}(\rho u) = 0.0 \Rightarrow \rho u = \text{cte}$$

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u C) dx = \int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dC}{dx} \right) dx \Rightarrow (\rho u C)_w^e = \left(k \frac{dC}{dx} \right)_w^e \Rightarrow (\rho u C)_e - (\rho u C)_w = \left(k \frac{dC}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dC}{dx} \right)_w$$

Numerical Methods in Geomechanics

18

حل مثال جابجایی- پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و پایا)

نحوه گسسته سازی گرادیان غلظت (سمت راست معادله) مشابه قبل است.
 هدف تعیین مقدار غلظت (C) در سلولهای مختلف E, P و W است.
 طرح های مختلفی در این زمینه مطرح شده است.
 طرح بالادست (Upwind) (Courant et al 1952),
 طرح پیوندی (Spalding 1972),
 طرح بالادست مرتبه دو (Second Order Upwind),
 طرح کوئیک (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics (Quick)) و
 طرح قاعده توانی (Power Law Scheme) از جمله این طرح ها می باشند.

$$F = \rho u$$

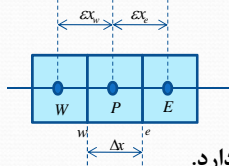
$$D = \frac{k}{\epsilon x = \Delta x}$$

$$P = \frac{F}{D}$$

معرفی پارامترهای جدید: F قدرت جابجایی
 D ضریب کلی پخش
 P عدد پکلت

مقایسه طرح های مطرح در گسسته سازی ترم جابجایی

- طرح اختلاف مرکزی (Central Difference): این طرح همان فرض لحاظ نمودن پروفیل خطی مشابه انفصال گرادیان می باشد.



$$C_e = \frac{1}{2}(C_p + C_E) \quad C_w = \frac{1}{2}(C_w + C_p)$$

- طرح بالادست (Upwind): در این طرح جابجایی تاثیر پذیری از بالادست دارد.

$$\text{if } F_e > 0.0 \Rightarrow C_e = C_p \text{ and } C_w = C_w$$

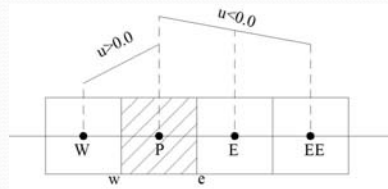
$$\text{if } F_e < 0.0 \Rightarrow C_e = C_E \text{ and } C_w = C_p$$

- طرح پیوندی (Hybrid)

$$\begin{cases} \text{if } P_e > 2 \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} = 0.0 \\ \text{if } -2 \leq P_e \leq 2 \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2} \\ \text{if } P_e < -2 \Rightarrow \frac{a_E}{D_e} = -P_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_E = \max(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0.0) \\ a_w = \max(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0.0) \\ a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w) \end{cases}$$

مقایسه طرح های مطرح در گسسته سازی ترم جابجایی

- طرح بالادست مرتبه دو (SOU): در این طرح جابجایی تاثیر پذیری از دو نقطه در بالادست دارد.



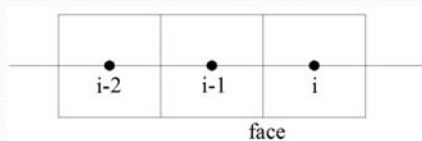
$$C_e = \begin{cases} C_E + (C_E - C_{EE}) \frac{\bar{e}E}{EEE} & \text{if } F_e < 0.0 \\ C_P + (C_P - C_W) \frac{\bar{P}e}{WP} & \text{if } F_e > 0.0 \end{cases}$$

Numerical Methods in Geomechanics

21

مقایسه طرح های مطرح در گسسته سازی ترم جابجایی

- طرح Quick: از برازش معادلات درجه دو بر روی گره ها بدست می آید. اگر شبکه یکنواخت باشد، خواهیم داشت:



$$C_{face} = \frac{6}{8}C_{i-1} + \frac{3}{8}C_i - \frac{1}{8}C_{i-2}$$

$$\text{if } F_w > 0.0 \Rightarrow C_w = \frac{6}{8}C_w + \frac{3}{8}C_p - \frac{1}{8}C_{ww}$$

$$\text{if } F_e > 0.0 \Rightarrow C_e = \frac{6}{8}C_p + \frac{3}{8}C_e - \frac{1}{8}C_w$$

Numerical Methods in Geomechanics

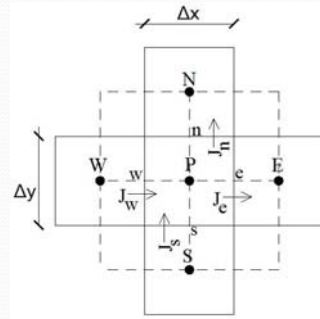
22

جابجایی - پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)

- پروفیل زمان، کاملاً ضمنی است

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S$$

$$\begin{cases} J_x = (\rho u C) - (k \frac{\partial C}{\partial x}) \\ J_y = (\rho v C) - (k \frac{\partial C}{\partial y}) \end{cases}$$



جابجایی - پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)

$$\frac{(\rho_p C_p)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + J_e - J_w + J_n - J_s = (s_c + s_u C_p) \Delta x \Delta y \quad (1)$$

$$continuity: \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0.0 \Rightarrow \frac{(\rho_p - \rho_p^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + F_e - F_w + F_n - F_s = 0.0 \quad (2)$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y \quad \text{and} \quad F_n = (\rho v)_n \Delta x$$

$$(1) - (2)C_p = (C_p - C_p^0)\rho_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - F_e C_p) - (J_w - F_w C_p) + (J_n - F_n C_p)$$

$$-(J_s - F_s C_p) = (s_c + s_u C_p) \Delta x \Delta y$$

$$J_e - F_e C_p = a_E (C_p - C_E) \quad J_w - F_w C_p = a_W (C_W - C_p)$$

$$a_P C_p = a_E C_E + a_W C_W + a_N C_N + a_S C_S + b$$

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0.0)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0.0)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0.0)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0.0)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_S + a_N + a_p^0 - s_u \Delta x \Delta y$$

$$b = s_c \Delta x \Delta y + a_p^0 C_p^0 \quad a_p^0 = \rho_p^0 \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$D_e = \frac{k_e \Delta y}{\varepsilon x_e} \quad D_n = \frac{k_n \Delta x}{\varepsilon y_n}$$

جابجایی - پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)

نکات:

- تابع $A(|P|)$ برای طرح های مختلف

Scheme	$A(P)$
CentralDifference	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybrid	$\max(0.0, 1 - 0.5 P)$
Power Law	$\max(0.0, (1 - 0.1 P)^5)$
Exponential	$ P / [\exp(P) - 1]$

- در طرح SOU دقت شود که ضرایب منفی معادله به سمت راست (b) برده شود.

جابجایی - پخش خالص یک آلاینده (حالت یک بعدی و گذرا)

نکات:

- در طرح SOU دقت شود که ضرایب منفی معادله به سمت راست (b) برده شود.
- طرح تفاضل مرکزی زمانی مناسب است که پخش قویتر از جابجایی باشد ($\frac{|F|}{D} \leq 2$) و برای بزرگتر از این مقدار جواب غیر واقعی می دهد.
- از میان الگوهای مطرح شده در زمینه انفصال ترم جابجایی، طرح نمایی از دقت بیشتری برخوردار است اما محدودیت استفاده دارد از این رو توصیه مراجع مختلف به استفاده از طرح قاعده توانی در انفصال ترم جابجایی است.
- محاسبات مربوط به سرعت با استفاده از انفصال معادله معروف ناویر- استوکس محاسبه میگردد. به علت پیچیدگی مسئله ناشی از وجود ترم فشار و غیر خطی بودن معادله از بیان آن در اینجا صرف نظر میگردد. علاقه مندان به این مبحث میتوانند به مراجع معرفی شده مراجعه نمایند.

مراجع:

- 1- Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, By S.V. Patankar, 1980, MC Grow Hill
- ۲- روشهای عددی در انتقال حرارت و جریان سیال (ترجمه [۱])، دکتر اسماعیل زاده، دانشگاه تبریز، ۱۳۷۳
- ۳- محاسبات عددی- کامپیوتری انتقال حرارت و حرکت سیالات (ترجمه [۱])، دکتر مقیمان، دانشگاه فردوسی، ۱۳۷۲
- 4- An Introduction to Computational Fluid Dynamics (The Finite Volume Method), By H.K Versteeg&Malalasekera, Longman,1995
- ۵- مقدمه ای بر دینامیک سیالات محاسباتی، (ترجمه [۴])، دکتر شجاعی فرد، دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۷۹
- 6- Computational Fluid Dynamics, By J.D.Anderson, 1995, MC Grow Hill
- 7- Numerical Computational of internal and External Flows, By C.Hirsch, 1990, Johnwiley

Numerical Methods in Geomechanics

27

نکات:

- وقتی ماتریس ضرایب معادلات نوشته می شود، تمامی ضرایب غیر صفر در امتداد سه قطر از ماتریس قرار می گیرند. برای حل این دستگاه، الگوریتم ماتریس سه قطری (TDMA)، حل کننده قوی و مناسب می باشد

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 \dots \dots a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \dots \dots 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots \dots a_{n-1m-2} & a_{n-1m-1} & a_{n-1m} \\
 0 & \dots \dots \dots 0 & a_{nm-1} & a_{nm}
 \end{bmatrix}
 \quad
 A = \begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\
 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\
 0 & 0 & a_{43} & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nm}
 \end{pmatrix}$$

Numerical Methods in Geomechanics

28