انتشار امواج در محیط الاستیک

انتشار امواج درمیله با طول نامحدود
انتشار امواج درمیله با طول محدود
انتشار امواج درشمع
انتشار امواج در یک لایه خاک
انتشار امواج در نیم فضای الاستیک

Dr. Hasan Ghasemzadeh

انتشار امواج درمیله با طول نامحدود

انتشار امواج طولی درمیله با طول نامحدود

انتشار امواج پیچشی درمیله با طول نامحدود

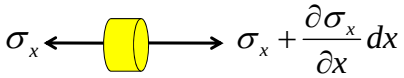
حل معادله موج

سرعت موج

Dr. Hasan Ghasemzadeh

انتشار امواج طولی درمیله با طول نامحدود

میله الاستیک



$$\Sigma F_x = -\sigma_x A + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) A = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx A$$

$$\Sigma F_x = m\ddot{u} = (\rho A dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

قانون دوم نیوتن

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

انتشار امواج طولی درمیله با طول نامحدود

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$u_{tt} = c_p^2 u_{xx}$$

معادله موج یک بعدی

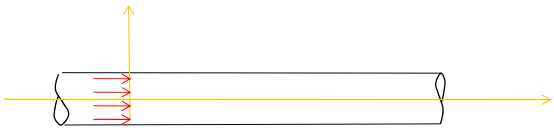
$$c_p = \sqrt{E/\rho}$$

سرعت انتشار موج (تنش)
تابع مشخصات مصالح

Dr. Hasan Ghasemzadeh

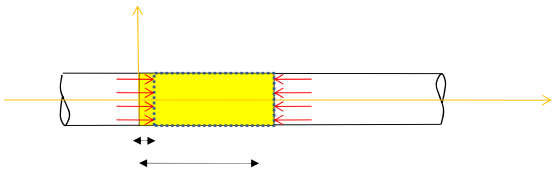
انتشار امواج طولی درمیله با طول نامحدود

سرعت ذرات



$x_x = c_p t$

$$u = \varepsilon x_x$$
$$u = \varepsilon c_p t \Rightarrow du = \varepsilon c_p dt$$
$$\frac{du}{dt} = \varepsilon c_p$$



$$\dot{u} = \varepsilon c_p$$

سرعت ذرات

تابع مشخصات مصالح و شدت تنش (یا کرنش)

Dr. Hasan Ghasemzadeh

انتشار امواج طولی درمیله با طول نامحدود

$$u_{tt} = c_p^2 u_{xx}$$

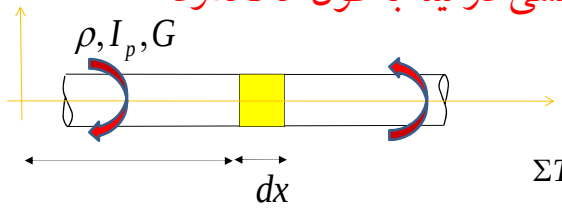
$$c_p = \sqrt{E/\rho}$$

$$\dot{u} = \varepsilon c_p$$

سرعت موج فشاری وسرعت ذرات هم جهت هستند
سرعت موج کششی وسرعت ذرات دارای جهت مخالف هم هستند
سرعت موج فقط تابع مشخصات مصالح می باشد
سرعت ذرات تابع مشخصات مصالح و شدت کرنش (یا تنش) می باشد

Dr. Hasan Ghasemzadeh

انتشار امواج پیچشی درمیله با طول نامحدود



$$\Sigma T = -T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right) = \frac{\partial T}{\partial x}dx$$

$$d\theta = \frac{T dx}{I_p G} \quad \Rightarrow T = I_p G \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\Sigma T = \left(I_p G dx\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

قانون دوم نیوتن $\Sigma T = \left(I_p \rho dx\right)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

انتشار امواج پیچشی درمیله با طول نامحدود

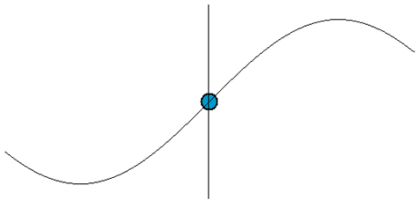
$$\theta_{tt} = c_s^2 \theta_{xx}$$

معادله یک بعدی انتشار موج پیچشی

$$c_s = \sqrt{G/\rho}$$

سرعت انتشار موج برشی یا پیچشی

سرعت موج برشی وسرعت ذرات بر هم عمودند
سرعت موج فقط تابع مشخصات مصالح می باشد



Dr. Hasan Ghasemzadeh

حل معادله موج

$$u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}$$

یادآوری تبدیل لاپلاس

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

$$\int_0^\infty \frac{d^2 f(t)}{dt^2} e^{-st} dt = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

تغییر متغیر

$$\bar{u}(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt$$

در ابتدا تغییر مکان صفر است

$$\bar{u}_{xx} = \frac{s^2}{c^2} \bar{u}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = Ae^{(-sx/c)}$$

A از شرایط مرزی بدست می آید

Dr. Hasan Ghasemzadeh

حل معادله موج

شرایط مرزی

$$x=0, t>0 \qquad \sigma=-P_0$$

$$\sigma=E\varepsilon=E\frac{\partial u}{\partial x}=-P_0$$

تبدیل لاپلاس شرایط مرزی

$$E\frac{d\bar{u}}{dx}=\frac{-P_0}{s}$$

با جایگذاری در جواب

$$\Rightarrow A=\frac{-P_0 c}{Es^2}$$

جواب معادله تبدیل یافته

$$\Rightarrow \bar{u}=\frac{-P_0 c}{Es^2}e^{\left(-sx/c\right)}$$

با تبدیل معکوس لاپلاس

$$u=\frac{P_0 c(t-x/c)}{E}H(t-x/c)$$

$H(t-t_0)$ تابع پله ای واحد Heaviside

$$H(t-t_0)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad t<t_0\\ 1 & \text{if} \quad t>t_0\end{cases}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

سرعت موج

سرعت فاز همان سرعت انتشار یک موج با فرکانس مشخص در محیط است.

سرعت موج با طول موج و دوره تناوب موج رابطه دارد:

$$v_p=\frac{\lambda}{T}$$

در یک محیط تک فاز همگن و همسانگرد الاستیک سرعت موج ثابت است و مستقل از فرکانس موج یا دوره تناوب آن است این محیط را غیر پاشیده Non Dispersive می نامیم

$$v_p=c_p \ or \ c_s$$

در صورتیکه شرایط فوق برقرار نباشد سرعت موج وابسته به فرکانس موج یا دوره تناوب آن است این محیط را پاشیده Dispersive می‌نامیم

$$v_p=f(\lambda,T)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

سرعت موج

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

جواب کلی موج $A\cos(\omega t \pm kx)$ مقدار فاز موج برابر است با $\varphi = \omega t \pm kx$

فرکانس زاویه‌ای بر حسب رادیان بر ثانیه $\omega = \frac{2\pi}{T}$

عدد موج بر حسب رادیان بر متر $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

در حالت $\omega t - kx = 0$ داریم

$$kx = \omega t \Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{x}{t} = \frac{\lambda}{T} = f(\lambda, T)$$

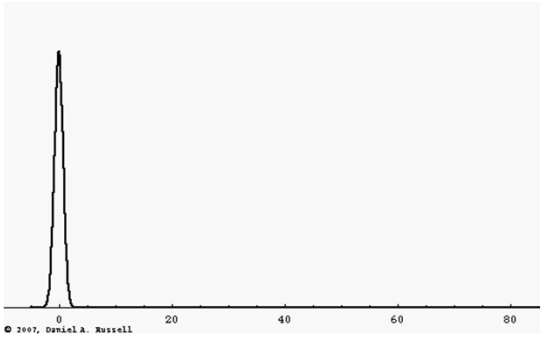
در حالت کلی فرکانس زاویه‌ای می‌تواند تابعی از عدد موج باشد

سرعت گروه موج $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_p + k\frac{\partial v_p}{\partial k} = v_p - \lambda\frac{\partial v_p}{\partial \lambda}$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

سرعت موج

مقایسه انتشار یک موج گوسی شکل شامل فرکانس‌های مختلف در محیط پاشیده و غیر پاشیده



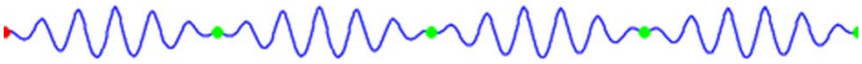
در این محیط پاشیده فرکانس‌های بالاتر سریعتر از فرکانس‌های پایین‌تر حرکت می کنند

وسط هر دو پالس با سرعت ثابتی حرکت می‌کند که سرعت گروه موج (معمولا سرعت انتقال انرژی یا اطلاعات موج) نام دارد

سرعت گروه موج در محیط غیر پاشیده با سرعت فاز برابر است

Dr. Hasan Ghasemzadeh

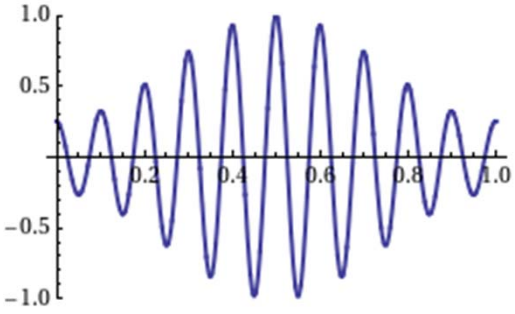
سرعت موج



سرعت گروه موج برابر سرعت نقطه سبزرنگ است
سرعت فاز برابر سرعت نقطه قرمز رنگ است

Dr. Hasan Ghasemzadeh

سرعت موج



در اینجا سرعت گروه موج یا همان سرعت پوش منحنی‌های امواج به سمت راست و مثبت است
درحالیکه سرعت فاز ها به سمت چپ و منفی است

Dr. Hasan Ghasemzadeh

مثال

رابطه پاشش برای موج آب عمیق عبارت است از

$$\omega = \sqrt{gk}$$

مطلوبست محاسبه سرعت فاز و گروه موج و رابطه بین آنها؟

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g}{2\sqrt{gk}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$v_g = \frac{1}{2} v_p$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh