

## انتشار امواج در محیط متخلخل

معادلات خاک اشباع  
انتشار امواج در خاک اشباع  
انتشار امواج در خاک غیر اشباع

Dr. Hasan Ghasemzadeh

3

## انتشار امواج در محیط متخلخل

معادلات خاک اشباع  
انتشار امواج در خاک اشباع  
انتشار امواج در خاک غیر اشباع

Dr. Hasan Ghasemzadeh

4

## انتشار امواج در محیط متخلخل

### معادلات خاک اشباع

### معادلات حاکم

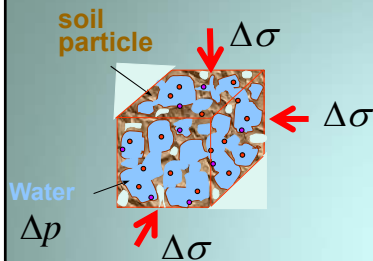
بقای جرم آب و دانه‌های جامد  
بقای ممنتوم آب و دانه‌های جامد  
معادلات ساختاری و سازگاری

Dr. Hasan Ghasemzadeh

5

### معادلات خاک اشباع

### Undrained compression of a porous medium



$$\sigma = \sigma' + \alpha p$$

$$\sigma' = \frac{-1}{C_m} \varepsilon$$

$$d\varepsilon = -C_m d\sigma'$$

$$\Delta V_f = -nC_f \Delta p V$$

$$\Delta V_s = -(1-n)C_s \Delta p V$$

$C_f$  compressibility of the pore fluid

$C_s$  compressibility of the solid

$v$  fluid velocity

$w$  Solid velocity

$\alpha$  Biot's coefficient

$C_m$  compressibility of the porous medium

$$S_p = nC_f + (\alpha - n)C_s \quad \text{storativity}$$

$$\rho = n\rho_f + (1-n)\rho_s \quad \text{total density}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

6

معادلات خاک اشباع

## Conservation of mass

pore fluid

$$\frac{\partial(n\rho_f)}{\partial t} + \frac{\partial(n\rho_f v)}{\partial x} = 0$$

فرض  $\frac{d\rho_f}{dp} = \rho_f C_f$

$$\rho_f \frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial(nv)}{\partial x} + v \frac{\partial(n\rho_f)}{\partial x} \approx 0$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n C_f \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} = 0$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

7

معادلات خاک اشباع

## Conservation of mass

solid

$$\frac{\partial[(1-n)\rho_s]}{\partial t} + \frac{\partial[(1-n)\rho_s w]}{\partial x} = 0$$

فرض  $\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{\rho_s C_s}{1-n} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} - n \frac{\partial p}{\partial t} \right)$

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + C_s \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} - n \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial(w)}{\partial x} - \frac{\partial(nw)}{\partial x} = 0$$

حذف  $\frac{\partial n}{\partial t}$  در بقای جرمها

$$n(C_f - C_s) \frac{\partial p}{\partial t} + C_s \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial(n(v-w))}{\partial x} = 0$$

or  $S_p \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial w}{\partial x} = S_p \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = - \frac{\partial(n(v-w))}{\partial x}$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

8

معادلات خاك اشباع

## Conservation of momentum

$$\text{fluid} \quad n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \tau n\rho_f \frac{\partial(v-w)}{\partial t} = -n \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2 \mu}{\kappa} (v-w)$$

$\tau$  tortuosity factor,

$\kappa$  Intrinsic permeability of the porous medium  $m^2$

$$\text{specific discharge} \quad q = n(v-w)$$

$$\text{In the absence of acceleration terms} \quad q = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{Darcy's law}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

9

معادلات خاك اشباع

## Conservation of momentum

$$\text{fluid plus particles} \quad n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$$\sigma = \sigma' + \alpha p \quad n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}$$

particles

$$(1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} - \tau n\rho_f \frac{\partial(v-w)}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial x} - (\alpha-n) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2 \mu}{\kappa} (v-w)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

10

معادلات خاک اشباع

## Constitutive equation

one-dimensional case 
$$m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$m_v$  one-dimensional compressibility of the porous medium

$$m_v = \frac{1}{K + \frac{4}{3}G} \rightarrow \text{confined modulus}$$

$K$  Bulk modulus

$G$  Bulk modulus

**Creep and irreversible plastic deformations can be considered**

Dr. Hasan Ghasemzadeh

11

معادلات خاک اشباع

## System of Equation

basic equations for the propagation of plane waves in a porous medium

total mass conservation 
$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + S_p \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial (n(v-w))}{\partial x}$$

total momentum 
$$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial \sigma'}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}$$

momentum of the pore fluid  
generalization of Darcy's law 
$$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \tau n\rho_f \frac{\partial (v-w)}{\partial t} = -n \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2 \mu}{\kappa} (v-w)$$

stress-strain relation of the soil skeleton 
$$m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = - \frac{\partial w}{\partial t}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

12

## انتشار امواج در محیط متخلخل

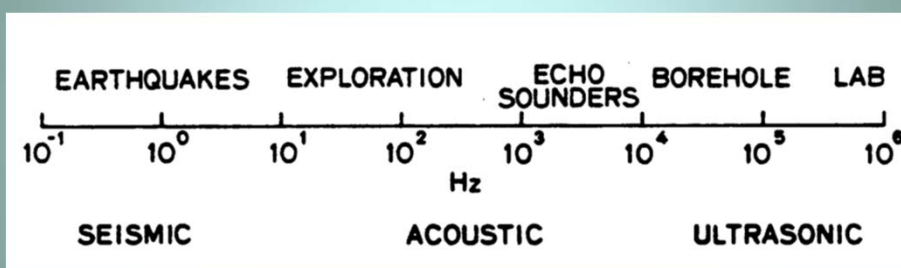
معادلات خاک اشباع  
انتشار امواج در خاک اشباع  
انتشار امواج در خاک غیر اشباع

Dr. Hasan Ghasemzadeh

13

## انتشار امواج در محیط متخلخل

محدوده تغییرات امواج با توجه به کاربردها



## انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

• روابط تنش - کرنش

$$-\phi p = (Qv_m + Rv_f)$$

$$-\sigma_{ij} - (1-\phi)p\delta_{ij} = 2\mu_m(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}v_m\delta_{ij}) + (Kv_m + Qv_f)\delta_{ij}$$

$$v_m = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad v_f = e_{11} + e_{22} + e_{33} \quad \text{انبساط حجمی فازهای اسکلت و سیال}$$

 $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر

$$K = \frac{(1-\phi)(1-\phi - K_m/K_s)K_s + \phi K_s K_m/K_f}{1-\phi - K_m/K_s + \phi K_s/K_f} \quad \text{ثوابت گدانکن}$$

$$Q = \frac{(1-\phi)(1-\phi - K_m/K_s)\phi K_s}{1-\phi - K_m/K_s + \phi K_s/K_f}$$

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1-\phi - K_m/K_s + \phi K_s/K_f}$$

## انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

• معادله مومنتوم فاز سیال:

$$-\phi \partial_i p = \partial_i (\rho_{12} v_j + \rho_{22} w_j) - b_0 (v_j - w_j)$$

• معادله مومنتوم فاز جامد:

$$-\partial_j \sigma_{ij} - (1-\phi) \partial_i p = \partial_i (\rho_{11} v_j + \rho_{12} w_j) + b_0 (v_j - w_j)$$

$$b_0 = \frac{\eta \phi^2}{k_0}$$

$$\rho_{12} = -\phi \rho_f (\tau - 1)$$

$$\rho_{22} = \phi \rho_f - \rho_{12}$$

$$\rho_{11} = (1-\phi) \rho_s - \rho_{12}$$

$$\tau = 1 - 0.5(1 - 1/\phi)$$



### انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- از ترکیب روابط تنش - کرنش و معادلات مومنوم، معادلات موج برحسب جابه‌جایی فاز جامد و جابه‌جایی فاز سیال بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\rho_{12}\partial_t^2 \mathbf{u}_s + \rho_{22}\partial_t^2 \mathbf{u}_f - b_0\partial_t(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_f) = C\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}_s + R\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}_f$$

$$\rho_{11}\partial_t^2 \mathbf{u}_s + \rho_{12}\partial_t^2 \mathbf{u}_f + b_0\partial_t(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_f) = F\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}_s - G\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_s + Q\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}_f$$

$$F = K + 4\mu_m/3$$

$\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_f$  جابه‌جایی فازهای اسکلت و سیال

- برای حل بردار جابه‌جایی فاز جامد و فاز سیال را برحسب پتانسیل موج فشاری و پتانسیل موج برشی تجزیه می‌کنیم. سپس سیستم معادله دیفرانسیل جزئی بدست آمده را با استفاده از تبدیل انتگرالی فوریه به سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی در فضای فرکانس - عدد موج تبدیل و در نهایت روابط پراکنش امواج فشاری و برشی را بدست می‌آوریم.

### انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- رابطه پراکنش امواج فشاری مطابق روبرو بدست می‌آید:

$$A_1 k_p^4 + A_2 k_p^2 + A_3 = 0$$

$$A_1 = -Q^2 + FR$$

$$A_2 = (-Ra_{11} + 2Qa_{12} - Fa_{22})\omega^2$$

$$A_3 = (-a_{12}^2 + a_{11}a_{22})\omega^4$$

$$a_{11} = \rho_{11} - i\hat{b}\omega^{-1}$$

$$a_{12} = \rho_{12} + i\hat{b}\omega^{-1}$$

$$a_{22} = \rho_{22} - i\hat{b}\omega^{-1}$$

- که اعداد موج فشاری نوع اول و نوع دوم را نتیجه می‌دهد:

$$k_{p1} = \pm \sqrt{\frac{-A_2 + (A_2^2 - 4A_1A_3)^{0.5}}{2A_1}} \quad k_{p2} = \pm \sqrt{\frac{-A_2 - (A_2^2 - 4A_1A_3)^{0.5}}{2A_1}}$$

- رابطه پراکنش امواج برشی بصورت مقابل حاصل می‌شود:

$$-\mu_m a_{22}\omega^2 k_s^2 - a_{12}^2\omega^4 + a_{11}a_{22}\omega^4 = 0$$

$$k_s = \pm \sqrt{\frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\omega^2}{\mu_m a_{22}}}$$

- که عدد موج برشی زیر را نتیجه می‌دهد:

## انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- با توجه به اعداد موج بدست آمده سرعت و استهلاک ذاتی طبق تعریف بصورت زیر بدست می آید:

$$c_j = \frac{\omega}{\text{Re}(k_j)} \quad \text{سرعت}$$

$$Q_j^{-1} = 2 \frac{\text{Im}(k_j)}{\text{Re}(k_j)} \quad \text{استهلاک ذاتی}$$

- که با قرار دادن  $j = p_1$ ،  $j = p_2$  و  $j = s$ ، بترتیب سرعت و استهلاک امواج فشاری نوع اول، فشاری نوع دوم و برشی بدست می آیند

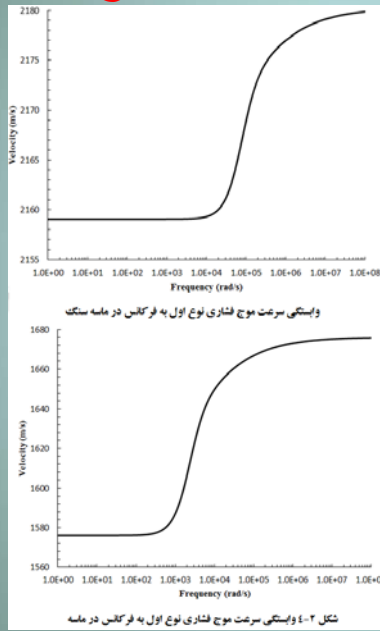
## انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

- خصوصیات مصالح مورد استفاده:

خصوصیات ماسه سنگ و ماسه				
پارامتر	نشانه	واحد	ماسه سنگ	ماسه
تخلخل	$\phi$	-	0.23	0.4
چگالی دانه های جامد	$\rho_s$	$\text{kg m}^{-3}$	2650	2600
مدول بالک اسکلت جلمد	$K_m$	GPa	1.021	$70 \times 10^{-3}$
مدول برشی اسکلت جلمد	$\mu_m$	GPa	1.441	$35 \times 10^{-3}$
مدول بالک دانه های جامد	$K_s$	GPa	35	35
نفوذپذیری ذاتی	$k_0$	$\text{m}^2$	$9 \times 10^{-13}$	$1 \times 10^{-10}$

خصوصیات آب			
پارامتر	نشانه	واحد	مقدار
ویسکوزیته	$\eta$	Pa.s	$1 \times 10^{-3}$
چگالی سیال	$\rho_f$	$\text{kg m}^{-3}$	1000
مدول بالک	$K_f$	GPa	2.25

### انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

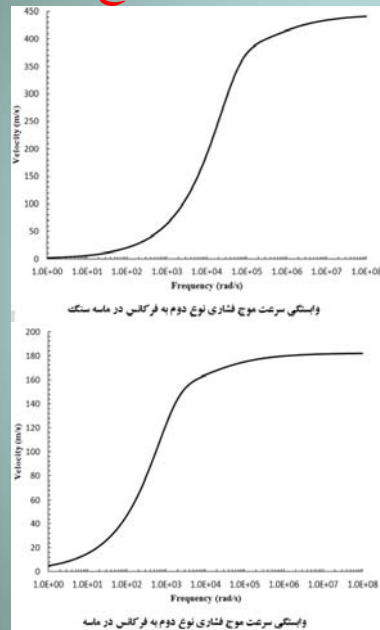


• سرعت موج فشاری نوع اول:

سرعت انتشار موج فشاری نوع اول در محدوده فرکانس پایین مستقل از فرکانس است. با افزایش فرکانس و رسیدن آن به فرکانس تبدیل وابستگی آن به سرعت افزوده و سپس کاهش می یابد.

وابستگی سرعت به فرکانس در ماسه قابل توجه تر از ماسه سنگ.

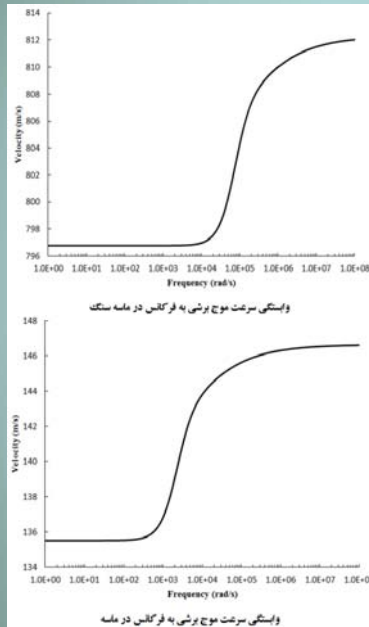
### انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع



• سرعت موج فشاری نوع دوم:

موج فشاری نوع دوم بمراتب سرعت کمتری نسبت به موج نوع دوم دارد. در محدوده فرکانس پایین سرعت بشدت به فرکانس وابسته است.

### انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع

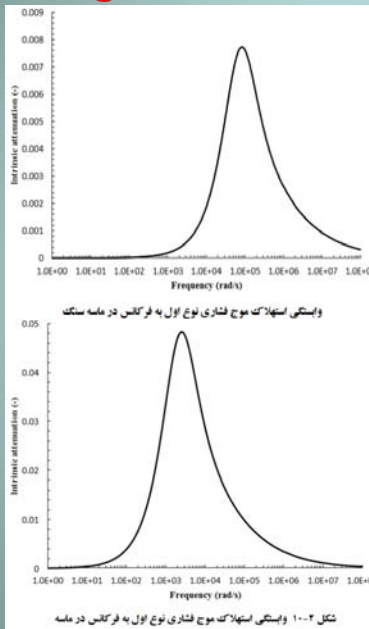


• سرعت موج برشی:

رفتار مشابه با موج فشاری نوع اول است اما وابستگی سرعت به فرکانس بسیار کمتر است.

سرعت موج برشی در ماسه سنگ بسیار بیشتر از ماسه است.

### انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع



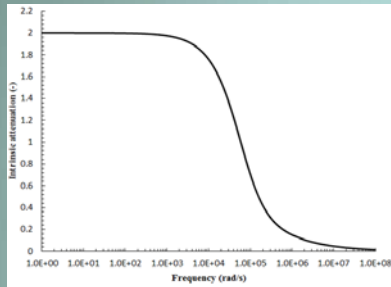
• استهلاک ذاتی موج فشاری نوع اول:

فرکانس شدت بر استهلاک ذاتی موج تاثیرگذار است. توجه شود که این استهلاک ناشی از حرکت نسبی فازهای سیال و جامد است.

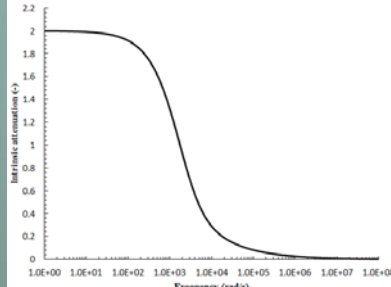
استهلاک موج فشاری نوع اول به تدریج با افزایش فرکانس، زیاد می شود. سپس، در اطراف فرکانس تبدیل به حداکثر مقدار خود می رسد و در نهایت مقدار آن شروع به کاهش یافتن می کند.

استهلاک ذاتی موج نوع اول در ماسه بمراتب از ماسه سنگ بزرگتر است.

### انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع



وابستگی استهلاک موج فشاری نوع دوم به فرکانس در ماسه سنگ



وابستگی استهلاک موج فشاری نوع دوم به فرکانس در ماسه

• استهلاک ذاتی موج فشاری نوع دوم:

بیشترین مقدار استهلاک موج فشاری نوع دوم در محدوده فرکانس پایین رخ می دهد.

با افزایش فرکانس، استهلاک این نوع موج کاهش می یابد.

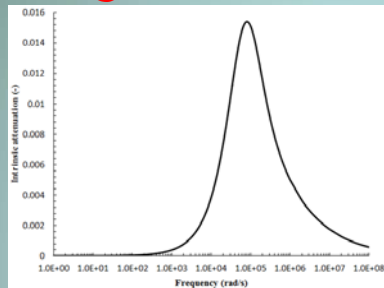
علت عمده بالا بودن استهلاک آن غیرهم فاز بودن قسمت های سیال و جامد است.

in a saturated porous medium two compressive waves can be generated,

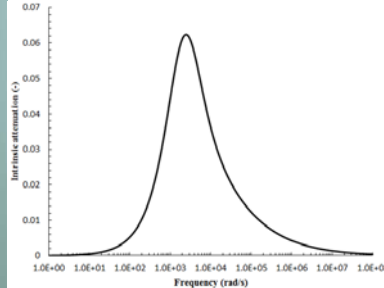
- 1- the particles and the fluid move together
- 2- they move in opposite directions.

The second wave is strongly damped, because of the friction between the soil particles and the fluid in the small pores.

### انتشار امواج در محیط متخلخل اشباع



وابستگی استهلاک موج برشی به فرکانس در ماسه سنگ



وابستگی استهلاک موج برشی به فرکانس در ماسه

• استهلاک ذاتی موج برشی:

رفتار استهلاکی موج برشی مشابه با موج فشاری نوع اول می باشد. استهلاک موج برشی نیز در ماسه بزرگتر از ماسه سنگ است.

1. Ghasemzadeh H., Abounouri A.A., 2013, *Compressional and shear wave intrinsic attenuation and velocity in partially saturated soils*, Soil Dynamics Earthquake Eng., 51- page:1-8, <http://dx.doi.org/10.1016/j.soildyn.2013.03.011>.
2. Ghasemzadeh H., Abounouri A.A., 2013, *The Effect of Dynamic Permeability on Velocity and Intrinsic Attenuation of Compressional Waves in Sand*, Civil Engineering Infrastructures Journal, 46(2): 221 – 231, December 2013.
3. Ghasemzadeh H., Abounouri A.A., 2012, *Effect of subsurface hydrological properties on velocity and attenuation of compressional and shear wave in fluid-saturated viscoelastic porous media*, Journal of Hydrology, 460-461 (2012) 110-116.

حسن قاسم‌زاده، امیرعلی ابونوری ۱۳۹۲. *سرعت و استهلاک امواج فشاری در محیط زمین ساختی با الگوی اشباع تک‌فازی*، نشریه زمین شناسی مهندسی، جلد هفتم، شماره یک، بهار و تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۱۷۰۶ - ۱۶۹۱.

Dr. Hasan Ghasemzadeh

27

Dr. Hasan Ghasemzadeh

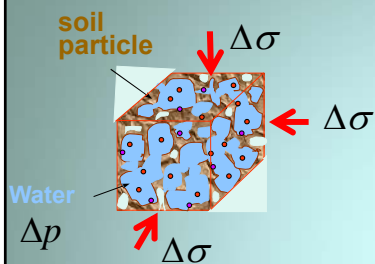
28

حل معادله موج در محیط اشباع  
با فرضیات ساده کننده

Dr. Hasan Ghasemzadeh

29

### Undrained compression of a porous medium



$$\sigma = \sigma' + \alpha p$$

$$\sigma' = \frac{-1}{C_m} \varepsilon$$

$$d\varepsilon = -C_m d\sigma'$$

$$\Delta V_f = -nC_f \Delta p V$$

$$\Delta V_s = -(1-n)C_s \Delta p V$$

$C_f$  compressibility of the pore fluid

$C_s$  compressibility of the solid

$v$  fluid velocity

$w$  Solid velocity

$\alpha$  Biot's coefficient

$C_m$  compressibility of the porous medium

$$S_p = nC_f + (\alpha - n)C_s \quad \text{storativity}$$

$$\rho = n\rho_f + (1-n)\rho_s \quad \text{total density}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

30

معادلات خاک اشباع

## System of Equation

basic equations for the propagation of plane waves in a porous medium

total mass conservation	$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + S_p \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial(n(v-w))}{\partial x}$
total momentum	$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial\sigma'}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}$
momentum of the pore fluid generalization of Darcy's law	$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \tau n\rho_f \frac{\partial(v-w)}{\partial t} = -n \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2\mu}{\kappa}(v-w)$
stress-strain relation of the soil skeleton	$m_v \frac{\partial\sigma'}{\partial x} = - \frac{\partial w}{\partial t}$

31

Dr. Hasan Ghasemzadeh

## Special case: Undrained waves

**permeability is very small:** fluid and the solids move together  $v = w$

**System of Equation**

$$p = - \frac{\alpha m_v}{\alpha^2 m_v + S_p} \sigma$$

$$\sigma' = - \frac{S_p}{\alpha^2 m_v + S_p} \sigma$$

soft saturated soil  $C_f, C_s \Rightarrow S_p \ll m_v, \alpha = 1$

$$(K_u + \frac{4}{3}G) \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

undrained compression modulus

$$K_u = K + \frac{\alpha^2}{S_p} = K + \frac{\alpha^2}{nC_u + (\alpha - n)C_s}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

compression modulus of the dry soil

32



### Special case: Undrained waves

$$\sigma - \frac{K_u + \frac{4}{3}G}{c} \omega = f_1(x + ct)$$

$$\sigma + \frac{K_u + \frac{4}{3}G}{c} \omega = f_2(x - ct)$$

wave velocity  $c$  
$$c = \sqrt{\frac{K_u + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho m_v} + \frac{\alpha^2}{\rho(nC_f + (\alpha - n)C_s)}}$$

For a completely saturated soft soil 
$$K_u + \frac{4}{3}G \approx \frac{1}{n} C_f$$
  

$$C_f = 0.5 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{N}$$

$n = 0.4, \rho = 2000 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow c = 1600 \text{ m/s}$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

33

### Special case: Rigid solid matrix

very stiff porous rock  $w = 0$

disregard the stress-strain relation and the momentum balance of the solid matrix

System of Equation 
$$n \frac{\partial v}{\partial x} = S_p \frac{\partial p}{\partial t}$$
  

$$(1 + \tau) \rho_f \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n\mu}{\kappa} v$$

Response: harmonic waves 
$$p(x, t) = P e^{i(\lambda(x-ct))}$$
  

$$v(x, t) = V e^{i(\lambda(x-ct))}$$

$\lambda$  wave number  $\lambda = \omega/c$  may be complex  
 $\omega$  frequency of the wave is real

Substitution and combination 
$$\frac{(1 + \tau) \rho_f S_p}{n} \left[ 1 + i \frac{n\mu}{(1 + \tau) \rho_f \omega \kappa} \right] c^2 = 1$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

34

### Special case: Rigid solid matrix

Definition

$$B = \frac{n\mu}{(1+\tau)\rho_f\omega\kappa} = \frac{ng}{(1+\tau)\omega k} \quad k = \frac{\kappa\rho_f g}{\mu}$$

$\kappa$  Intrinsic permeability of the porous medium  $m^2$   
 $k$  hydraulic conductivity of the porous medium  $m/s$

A- For normal soil or rock  $k = 10^{-4} \text{ cm/s}$  Imaginary part dominates so

$$\Rightarrow c^2 = -i \frac{\omega\kappa}{\mu S_p} \quad \lambda = \omega/c = -(1+i)\sqrt{\frac{S_p\omega\rho_f g}{2k}}$$

B- For extremely high frequencies

Real part dominates so 
$$c^2 = \frac{n}{(1+\tau)\rho_f S_p} = \frac{1}{(1+\tau)\rho_f C_f}$$

waves of this type will be strongly damped by the friction with the solids

Dr. Hasan Ghasemzadeh

35

### Special case: Rigid solid matrix

Example A- A soil completely saturated with water

$$\begin{aligned} \omega &= 1 \text{ s}^{-1} & \lambda &= -(1+i)\sqrt{\frac{S_p\omega\rho_f g}{2k}} \\ k &= 10^{-4} \text{ cm/s} \\ n &= 0.4 \\ S_p &= nC_f = 0.2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{N} & \Rightarrow \text{Re}(\lambda) &= 1 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

the wave will be damped in the immediate vicinity of the source

Example B- A soil completely saturated with water

$$\begin{aligned} C_f &= 0.5 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{N} \\ \rho_f &= 1000 \text{ kg/m}^3 \\ \tau &= 0 \end{aligned} \quad c = \sqrt{\frac{1}{(1+\tau)\rho_f C_f}} = 1400 \text{ m/s}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

36

## گسترش موج در لایه خاک اشباع

## System of Equation

total mass conservation

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + S_p \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(n(v-w))}{\partial x}$$

total momentum

$$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + (1-n)\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial\sigma'}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}$$

momentum of the pore fluid  
generalization of Darcy's law

$$n\rho_f \frac{\partial v}{\partial t} + \tau n\rho_f \frac{\partial(v-w)}{\partial t} = -n \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{n^2 \mu}{\kappa} (v-w)$$

stress-strain relation of the soil skeleton

$$m_v \frac{\partial\sigma'}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

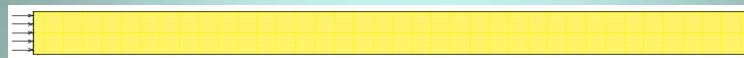
Dr. Hasan Ghasemzadeh

37

## گسترش موج در لایه خاک اشباع

## حل تحلیلی

general periodic pore pressure at the free end of a very long column



فرض جواب

$$p(x,t) = P e^{i(\lambda x + \omega t)}$$

$$\sigma'(x,t) = S e^{i(\lambda x + \omega t)}$$

$$v(x,t) = V e^{i(\lambda x + \omega t)}$$

$$w(x,t) = W e^{i(\lambda x + \omega t)}$$

 $\omega$  given frequency $\lambda$  Unknown wave number  
Maybe complex number

## Substitution

$$n\lambda V + (\alpha - n)\lambda W = S_p \omega P$$

$$m_v \omega S = -\lambda W$$

$$n\rho_f \omega V + (1-n)\rho_s \omega W = -\lambda S - \alpha \lambda P$$

$$(1+\tau)n\rho_f \omega V - \tau n\rho_f \omega W = -n\lambda P + \frac{i n^2 \mu}{\kappa} (V - W)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

38

### گسترش موج در لایه خاک اشباع

Dimensionless parameters

$$d_f = \rho_f / \rho,$$

$$d_s = \rho_s / \rho,$$

$$a = \frac{n\mu}{\kappa\rho_f\omega} = \frac{ng}{k\omega},$$

$$b = S_p / m_v,$$

$$\lambda^2 = \rho m_v \omega^2 \gamma^2.$$

$$c^2 = \frac{1}{\rho m_v},$$

$$\gamma = \frac{c\lambda}{\omega}$$

The homogeneous system of equations has a non-zero solution only if

$$A(\gamma)^4 + B(\gamma)^2 + C = 0$$

$$A = n,$$

$$B = -n(1-n)d_s - [(\alpha-n)^2 + \alpha^2\tau]d_f - (1+\tau)d_f b + iad_f(\alpha^2 + b),$$

$$C = [(1-n)d_s + \tau]d_f b - iad_f b.$$

$$\lambda_1 = \pm(q_1 + ir_1)(\omega/c) \quad \lambda_2 = \pm(q_2 + ir_2)(\omega/c)$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

39

### گسترش موج در لایه خاک اشباع

جواب

$$p = A_p \exp[-(\omega/c)(r_1 - iq_1)x] \exp(i\omega t) + B_p \exp[-(\omega/c)(r_2 - iq_2)x] \exp(i\omega t),$$

$$w = A_w \exp[-(\omega/c)(r_1 + iq_1)x] \exp(i\omega t) + B_w \exp[-(\omega/c)(r_2 - iq_2)x] \exp(i\omega t),$$

$$\sigma' = A_s \exp[-(\omega/c)(r_1 - iq_1)x] \exp(i\omega t) + B_s \exp[-(\omega/c)(r_2 - iq_2)x] \exp(i\omega t),$$

$$v = A_v \exp[-(\omega/c)(r_1 - iq_1)x] \exp(i\omega t) + B_v \exp[-(\omega/c)(r_2 - iq_2)x] \exp(i\omega t).$$

$$\frac{A_v}{A_w} = -\frac{\alpha-n}{n} - \frac{(1-ad_f-\gamma_1^2)b}{n(d_fb-\alpha\gamma_1^2)},$$

$$\frac{B_v}{B_w} = -\frac{\alpha-n}{n} - \frac{(1-ad_f-\gamma_2^2)b}{n(d_fb-\alpha\gamma_2^2)}.$$

$$\frac{A_w}{A_p} = \frac{(d_fb-\alpha\gamma_1^2)cm_v}{(1-ad_f-\gamma_1^2)\gamma_1},$$

$$\frac{B_w}{B_p} = \frac{(d_fb-\alpha\gamma_2^2)cm_v}{(1-ad_f-\gamma_2^2)\gamma_2}.$$

$$\frac{A_s}{A_w} = -\frac{\gamma_1}{cm_v},$$

$$\frac{B_s}{B_w} = -\frac{\gamma_2}{cm_v},$$

کاهندگی با فاصله

boundary conditions

$$x = 0 : \sigma' = (1-\alpha)p_0 \exp(i\omega t),$$

$$x = 0 : p = p_0 \exp(i\omega t).$$

$$\frac{A_p}{p_0} = \frac{[d_fb-\gamma_2^2 + (1-\alpha)(1-ad_f)](1-ad_f-\gamma_1^2)}{(\gamma_1^2-\gamma_2^2)(\alpha-\alpha^2d_f-bd_f)},$$

$$\frac{B_p}{p_0} = -\frac{[d_fb-\gamma_1^2 + (1-\alpha)(a-ad_f)](1-ad_f-\gamma_2^2)}{(\gamma_1^2-\gamma_2^2)(\alpha-\alpha^2d_f-bd_f)}.$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

40

## گسترش موج در لایه خاک اشباع

جواب

Approximation of the solution

For real soils  $k\omega$  often very small and  $a = \frac{ng}{k\omega}$  will be very large  
A, B and C may be approximated by

$$A = n \quad B = iad_f(\alpha^2 + b) \quad C = iad_f b$$

Possible solution for  $x \geq 0$

$$\Rightarrow \gamma_1 = -\sqrt{\frac{b}{a^2 + b}}, \quad \gamma_2 = -(1-i)\sqrt{\frac{c^2}{2c_v\omega}}$$

one-dimensional consolidation coefficient of the porous medium  $c_v = \frac{k}{\rho_f g(\alpha^2 m_v + S_p)}$

wave is noticeable only for a distance  $L = 4\sqrt{2c_v/\omega}$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

41

## گسترش موج در لایه خاک اشباع

جواب

$$c_2 = \left[ \frac{1 - \alpha + S_p/m_v}{\alpha - n + \tau + (1 + \tau)S_p/m_v} \right] \frac{n}{S_p \rho_f}$$

Approximation of velocity

if  $\alpha = 1, \tau = 0, S_p = nC_f$

$$c_2 = \left[ \frac{nC_f/m_v}{1 - n + nC_f/m_v} \right] \frac{1}{C_f \rho_f}$$

Two wave:

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_1 & \quad \frac{v}{w} \approx 1 \\ \gamma = \gamma_2 & \quad \frac{v}{w} \approx -\left[ \frac{\alpha - n}{\alpha} + \frac{S_p}{\alpha n m_v} \right] \end{aligned}$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

42

## گسترش موج در لایه خاک اشباع

Example: soil properties

Symbol	Property	Value
$\rho_s$	Density of solids (kg/m <sup>3</sup> )	2650
$\rho_f$	Density of fluid (kg/m <sup>3</sup> )	1000
$k$	Permeability (m/s)	0.001
$n$	Porosity (-)	0.400
$\tau$	Tortuosity (-)	0.000
$\alpha$	Biot coefficient (-)	1.000
$m_v$	Compressibility of soil (m <sup>2</sup> /MN)	0.0002
$C_f$	Compressibility of fluid (m <sup>2</sup> /MN)	0.0005
$C_s$	Compressibility of solids (m <sup>2</sup> /MN)	0.000
$\omega$	Frequency (1/s)	10

Exact solution

$$\gamma_1 = -0.707106781 + 0.000000004i : A_v/A_w = 0.999999981 - 0.000012500i,$$

$$\gamma_2 = -22.439191923 + 22.394414404i : B_v/B_w = -4.000000019 - 0.000012500i.$$

approximate solution

$$\gamma_1 = -0.7071068 : A_v/A_w = 1,$$

$$\gamma_2 = -22.416793 + 22.416793i : B_v/B_w = -4.$$

Dr. Hasan Ghasemzadeh

43