آزمون فراصوتی

Ultrasonic Testing (UT)

معادله انتشار موج

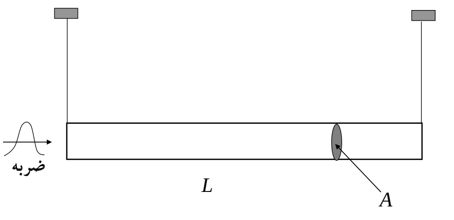
مدرس: دکتر فرهنگ هنرور

گروه ساخت و تولید

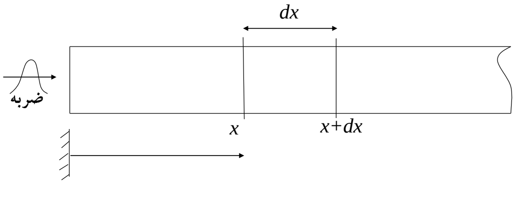
دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

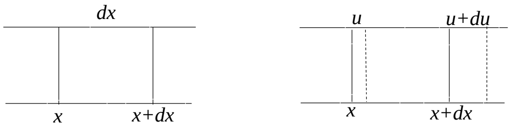
میله با مقطع دلخواه



عنصر دیفرانسیلی در میله



عنصر دیفرانسیلی dx



(الف) (ب)

$$u = u(x,t)$$

منطقی است که جابجايي ذرات کوچک فرض شود و بسط تیلور به معادله اعمال شود

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + H.O.T.$$

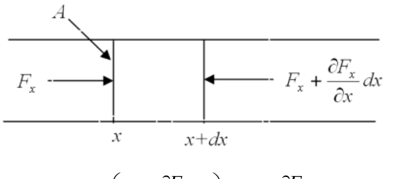
$$(u + du) - u = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

با توجه به تعریف کرنش:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{(\partial u / \partial x) dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

عنصر دیفرانسیلی و نیروهای وارد بر دیوارههای آن



$$dF_x = \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx\right) - F_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$$

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$$

تنش بر روي ديواره سمت چپ عنصر ديفرانسيلي برابر است با،

$$\Delta\sigma = \frac{F_x}{A}$$

$$E = \frac{F_x / A}{\partial u / \partial x}$$

$$F_x = AE\frac{\partial u}{\partial x}$$

با مشتق گيري پاره اي از معادله بالا نسبت به x داريم:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\boxed{dF_x = AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx}$$

معادله دوم نيوتن:

$$dF_x = (dm)a$$

$$dm = \rho(Adx) \qquad a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\boxed{dF_x = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx}$$

$$\boxed{dF_x = AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx} \qquad \boxed{dF_x = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_l'^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

سرعت موج طولي: $c_l' = \sqrt{E/\rho}$

سرعت موج عرضي: $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

معادله موج در حالت سه بعدی:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- هر یک از این ثابت‌ها را می‌توان بر حسب دو ثابت دیگر بیان کرد. ضرایب لامه (Lamé constants) توسط رابطه‌های زیر بر حسب مدول یانگ و ضریب پواسون بیان می‌شوند:

$$\lambda = \frac{E\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

- سرعت‌های موج طولی و عرضی در یک ماده را هم می‌توان به عنوان دو ثابت کشسانی آن ماده تلقی کرد.

$$E = \frac{\rho c_s^2[3(c_l/c_s)^2 - 4]}{(c_l/c_s)^2 - 1}$$

$$\nu = \frac{(c_l/c_s)^2 - 2}{2[(c_l/c_s)^2 - 1]}$$

■ معادله یک بعدی موج که در انتشار امواج در سیم کشیده شده و یا میله‌های نازک صادق است عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

■ حل معادله به روش جداسازی متغیرها

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x)g(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x)g''(t)$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)} = -k^2 = \text{constant}$$

معادله بالا را میتوان به صورت دو معادله زیر نوشت:

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \qquad g''(t) + k^2c^2 g(t) = 0$$

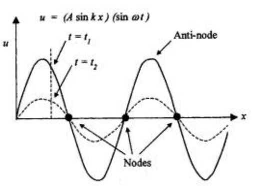
$$f(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx \qquad g(t) = A_3 \sin kct + A_4 \cos kct$$

حال معادله جابجایی به صورت زیر در می آید:

$$u(x,t) = (A_1 \sin kx + A_2 \cos kx)(A_3 \sin \omega t + A_4 \cos \omega t)$$

■ پس از ساده نمودن معادله صفحه قبل داریم:

$$u(x,t) = A_1A_4 \sin kx \cos \omega t + A_2A_3 \cos kx \sin \omega t + A_2A_4 \cos kx \cos \omega t + A_1A_3 \sin kx \sin \omega t$$



موج ایستا

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$

$$u(x,t) = B_1 \sin(kx+\omega t) + B_2 \sin(kx-\omega t) + B_3 \cos(kx+\omega t) + B_4 \cos(kx-\omega t)$$

یکی از عبارات معادله فوق را در نظر میگیریم:

$$u(x,t) = A\cos(kx-\omega t) = A\cos(\omega t - kx)$$

$$u(x,t) = A\cos k(ct-x), \qquad \omega = kc$$

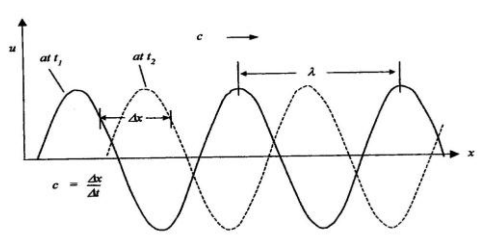
عبارت زیر را فاز موج مینامند:

$$\phi = \omega t - kx = k(ct-x)$$

توجه کنید که با افزایش زمان t، متغیر x نیز باید به اندازه $c\Delta t$ افزایش یابد تا Φ ثابت بماند و در نتیجه در حالت کلی:

الف) $f(ct-x)$ تابع موجی است که به سمت راست حرکت می کند چون x باید مثبت باشد.

ب) $f(ct+x)$ تابع موجی است که به سمت چپ حرکت می کند چون x باید منفی باشد.



معادله تابع موج هارمونیک:

$$u(x,t) = B_1 \sin(kx+\omega t) + B_2 \sin(kx-\omega t) + B_3 \cos(kx+\omega t) + B_4 \cos(kx-\omega t)$$

شکل نمایی تابع موج هارمونیک:

$$u = A_1 e^{i(\omega t + kx)} + B_1 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$u = (A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) e^{i\omega t}$$